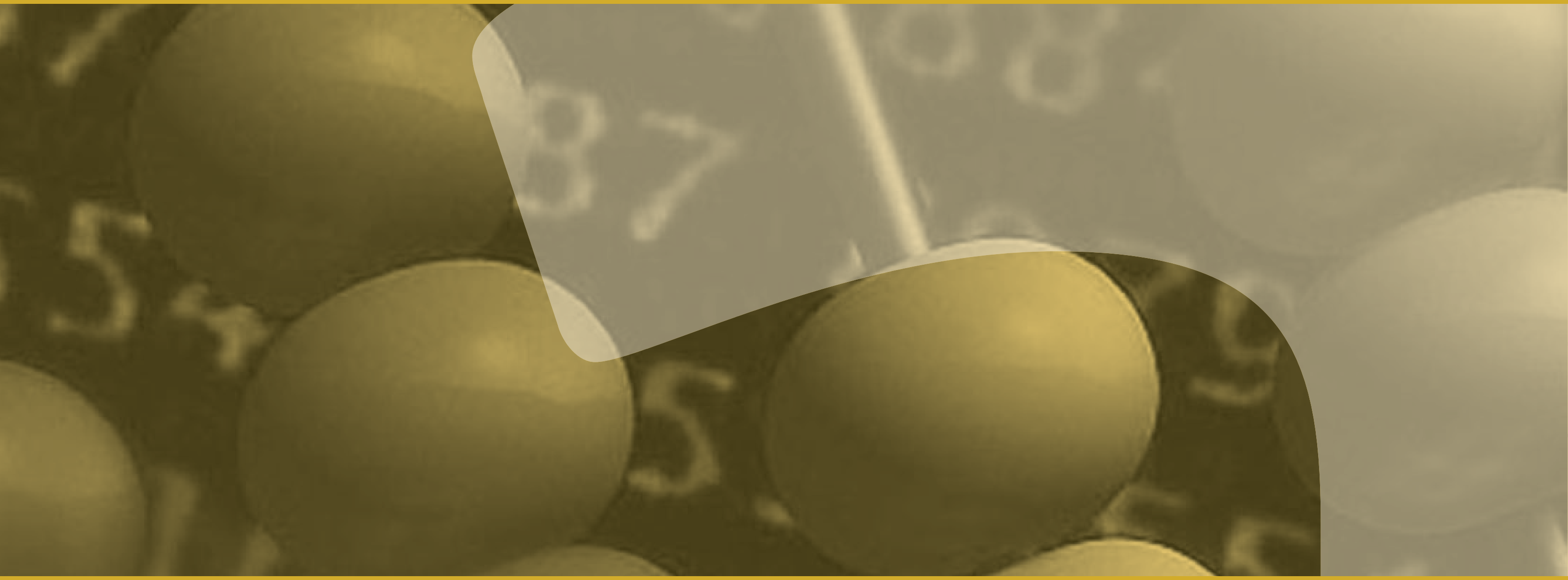
Páginas para el docente



Matemática

Cálculo Mental con Números Naturales

Tercer ciclo de la escuela primaria

adultos

G.C.B.A
Ministerio de Educación
Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula

Matemática

Cálculo mental con números naturales

Tercer ciclo de la escuela primaria

Páginas para el alumno

G.C.B.A
Ministerio de Educación
Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula

Matemática. Cálculo mental con números naturales para el docente / coordinado por Susana De Marinis. - 1a ed. - Buenos Aires : Ministerio de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2008.

56 p. ; 28x21 cm.

ISBN 978-987-549-355-1

1. Material Auxiliar para la Enseñanza. I. De Marinis, Susana, coord.
CDD 371.33

ISBN: 978-987-549-355-1

Ministerio de Educación
Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula. 2007
Hecho el depósito que marca la Ley n° 11.723

Esmeralda 55, 8°.
C1035ABA. Buenos Aires
Correo electrónico: dircur@buenosaires.edu.ar

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires

Jefe de Gobierno
Jorge Telerman

Ministra de Educación
Ana María Clement

Subsecretario de Educación
Luis Liberman

Directora General de Educación
Adelina de León

Director de Área de Educación Primaria
Carlos Prado

Director del Área de Educación del Adulto
y del Adolescente
Alejandro Kuperman

Matemática.
Cálculo mental con números naturales
Tercer ciclo de la escuela primaria
Páginas para el alumno

Coordinación autoral: Susana De Marinis.
Elaboración del material: Claudia Broitman

Este material es una adaptación del documento *Cálculo mental con números naturales* (G.C.B.A., Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula, 2005; Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza 2004-2007).

Agradecimientos:
A los docentes Eva Soledad Buzzett, Elías Capeluto, Carlos Casas, Liliana Orsi y Graciela Tojeiro, cuya lectura y análisis de prácticas han enriquecido este material.

G.C.B.A.

Edición a cargo de la Dirección de Currícula

Supervisión de edición: Paula Galdeano.
Diseño gráfico: Patricia Peralta.

Apoyo administrativo y logístico: Olga Loste y Jorge Louit.

Índice

G.C.B.A.

Un material sobre cálculo para alumnos adultos

La enseñanza de la matemática para adultos es un área poco explorada y sistematizada en nuestro país. Existen pocos trabajos de investigación, pocos materiales para docentes y para alumnos. Por otra parte, es sin duda un área compleja ya que nos introduce en una problemática en la cual la heterogeneidad de los conocimientos matemáticos de los adultos que estudian es más amplia que la de cualquier grupo de alumnos-niños. En los últimos años, a partir de extender la preocupación acerca de los procesos de alfabetización al campo del trabajo matemático, ha habido en diversos países de América Latina trabajos de investigación y análisis sobre los problemas de la enseñanza del cálculo y la numeración con jóvenes y adultos.[1]

Tanto en estos trabajos como en las experiencias relevadas por los docentes de jóvenes y adultos es ampliamente reconocido hoy que los adultos que inician o cursan la escolaridad primaria tienen un alto bagaje de conocimientos sobre los números y las operaciones. Tienen recursos propios de cálculo, muchos aprendidos en experiencias anteriores escolares, otros en sus ámbitos de trabajo o vida cotidiana, incluso han adquirido recursos de cálculo a partir de sus experiencias como padres o hermanos de niños que cursan la escuela. También es ampliamente reconocido que los adultos, más allá de su tránsito por la escuela, tienen un dominio importante de relaciones matemáticas que, aunque implícitas, les permiten resolver una amplia gama de problemas de cálculo estimativo, de cálculo con dinero, de relaciones de proporcionalidad, de problemas cotidianos comerciales, etc. Para muchos alumnos el interés por el dominio del cálculo es incluso motor de asistencia al estudio, sea para mejorar el éxito en situaciones cotidianas, laborales o comerciales, como para acompañar el estudio de familiares pequeños.

Tomar conciencia de sus conocimientos e intereses plantea a la enseñanza de matemática de jóvenes y adultos algunos desafíos que vienen siendo preocupación de investigadores y docentes: ¿cómo incluir la heterogeneidad de conocimientos de los alumnos?, ¿cómo establecer puentes entre los recursos más espontáneos e intuitivos usados por los adultos cotidianamente y los objetos matemáticos que se quieren enseñar?, ¿cómo “dialogar” con esos saberes no escolares?, ¿cómo generar espacios para la difusión de los recursos propios de los alumnos, muy diferentes según sus trayectorias escolares y de vida?, ¿cómo organizar una enseñanza que no suponga que los alumnos no saben nada de aquello que se espera aprendan o sistematicen?, ¿cómo tomar los recursos orales de cálculo y establecer relaciones que permitan interpretar y producir cada vez mejores representaciones escritas de los recursos usados?, ¿cómo secuenciar la enseñanza en forma diferente de la que se realiza para los niños, teniendo en cuenta conocimientos y necesidades?

1 Tal es el caso de autores como A. Avila (1997, 2003, 2003b); M.F. Delprato (2005) y G. Mariño (2003).

Evidentemente no hay respuestas únicas a estas preocupaciones, pero las mismas guían las propuestas de muchos docentes y de este material.

Por tratarse en este caso de un material destinado al 3º ciclo de la escolaridad primaria, aparece además otra preocupación: ¿cómo favorecer que –además de que los alumnos sistematicen y mejoren en sus recursos de cálculo–, expliciten y reorganicen ciertas propiedades y relaciones matemáticas y progresivamente se inicien en ciertas prácticas matemáticas ligadas al tipo de razonamiento más argumentativo, deductivo, abstracto, propio de esta disciplina? La finalización de la escuela primaria nos exige proveer a los alumnos de un caudal de conocimientos y de prácticas matemáticas que, además de ayudar a mejorar su dominio en el cálculo cotidiano o comercial, les permita una entrada a los conocimientos y modos de pensar propios de esta disciplina. De hecho, se espera que muchos de los alumnos que cursan el 3º ciclo de la escolaridad primaria puedan continuar sus estudios matemáticos. Para ellos será insuficiente entonces con una matemática "para la vida cotidiana".

Este material se inscribe en el reconocimiento del área de vacancia de materiales para jóvenes y adultos, y en la búsqueda de algunos recursos que ayuden a los docentes de adultos a cubrir dicha ausencia con una gama de problemas adaptados especialmente. Subyace además la idea de que "vale la pena" introducir a los alumnos en cierto tipo de prácticas matemáticas que excedan el dominio del cálculo instrumental y les permita visitar los objetos matemáticos desde una perspectiva que permita ir "más allá" del éxito con unos números y unos cálculos con los que se está tratando. Es decir que a partir de una primera entrada exploratoria a un conjunto de problemas de cálculo se propone "traccionar" hacia la posibilidad de anticipar y producir relaciones nuevas.

Para su elaboración hemos adaptado el documento *Cálculo Mental con Números Naturales. Apuntes para la enseñanza,* elaborado en el año 2006 por el Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación, Dirección de Currícula. El trabajo de adaptación fue realizado a partir de los aportes de un grupo de docentes de adultos. Su lectura y análisis de prácticas en el aula nos han enriquecido con sugerencias e ideas.

Acerca de la enseñanza del cálculo mental

En tiempos pasados, el cálculo mental ocupaba un lugar importante en las clases de matemática. Se asociaba tradicionalmente a cálculos memorizados, orales, a cálculos realizados en "la cabeza", sin apoyo de lápiz y papel. Luego, fue perdiendo peso hasta desaparecer o quedar limitado a la memorización de las tablas de multiplicación. Esta caracterización es diferente del sentido con el cual se considera el cálculo mental en este documento. Ya no resulta tan importante la velocidad o la memoria, especialmente por la accesibilidad al uso de calculadoras, pero sí aparecen otros objetivos y otras prácticas que se espera producir en torno del cálculo.

Los procedimientos de cálculos algoritmizados consisten en una serie de reglas aplicables en un orden determinado, siempre del mismo modo, independientemente de los datos, que garantizan alcanzar el resultado buscado en una serie de pasos. Las cuentas convencionales que se utilizan para resolver las operaciones constituyen procedimientos de este tipo: se caracterizan por el uso de una única técnica para una operación dada, siempre la misma, independientemente de cuáles sean los números en juego.

En contraste, el cálculo mental refiere al "conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados".[2] Es decir, se caracteriza por la presencia de una diversidad de técnicas vinculadas a los números en juego y los conocimientos (o preferencias) del sujeto que las despliega.

Examinemos las características del cálculo mental en relación con el cálculo algorítmico a partir de un par de ejemplos.

a) *¿Cuánto hay que restarle a 1.000 para obtener 755?* podría responderse apelando al algoritmo de la resta:

```
  1.000
–   755
    245
```

A través de estrategias de cálculo mental, podría resolverse de diversas maneras. Algunas posibles serían:

- Calcular el complemento de 755 a 1.000 apoyándose en números redondos:
  755 + 5 = 760
  760 + 40 = 800   800 + 200 = 1.000
  200 + 40 + 5 = 245
- Ir restando sucesivos números a 1.000 hasta alcanzar 755:
  1.000 – 200 = 800   800 – 45 = 755   200 + 45 = 245

b) La multiplicación 4 x 53 podría resolverse mediante el algoritmo convencional de la multiplicación o también mediante procedimientos de cálculo mental como los siguientes: 4 x 50 + 4 x 3; o bien, como el doble de 53 es 106, 4 x 53 es el doble de 106, es decir 212.

....

2 Parra, C. (1994): "Cálculo mental en la escuela primaria", en Parra y Saiz (comp): Didáctica de las matemáticas, Buenos Aires, Paidós.

La distinción entre cálculo algorítmico y cálculo mental no reside en que el primero sea escrito y el segundo no se apoye en el uso de lápiz y papel. Como mencionamos, el cálculo algorítmico utiliza siempre la misma técnica para una operación dada, cualquiera sean los números. Esto hace que baste con conocer sus pasos. Muchas veces se transmiten estos pasos sin ninguna elaboración de su sentido, llevando a una aplicación ciega de técnicas, con una pérdida de control sobre qué se hace, sobre el resultado que se obtiene y cuándo es efectivamente una herramienta adecuada en función de los números en juego.

En cambio, el cálculo mental admite varias maneras posibles para resolver un mismo cálculo. Recurre a diferentes descomposiciones de los números, descomposiciones basadas en propiedades de la numeración decimal y de las operaciones. Esos modos de resolución ponen en escena diferentes relaciones vinculadas con un concepto, dando cabida al análisis de distintas aristas del mismo. Y dichos modos de resolución, pueden ser escritos también, ya que no es el hecho de ser escritos o no el rasgo que distingue el cálculo mental del algorítmico en la conceptualización aquí presentada.

Los algoritmos convencionales para las operaciones también apelan a propiedades de los números y de las operaciones, sólo que, al hacerlo de manera automatizada, es posible utilizarlos sin tener en cuenta el sentido de las descomposiciones de los números ni las operaciones parciales que se realizan. En la resta de nuestro ejemplo, cuando se "pide uno al número del orden siguiente", no hay necesidad de pensar que se está descomponiendo el 1.000 en 900 + 100 y en 900 + 90 + 10. En el cálculo mental, los números siguen considerándose en su globalidad. En los algoritmos convencionales, en cambio, se "parte" el número tratándolo como si estuviera compuesto por cifras aisladas. De ese modo, se pierde de vista el sentido de cada una de ellas. Comprender estas descomposiciones permiten reconstruirlas –de ser necesario–, anticipar resultados posibles, controlar los pasos que se realizan; en definitiva, que la técnica utilizada preserve un cierto sentido.

Ambos tipos de cálculos apelan a conocimientos sobre resultados memorizados, a propiedades de la numeración y de las operaciones, pero lo hacen de manera diferente. Los algoritmos convencionales constituyen técnicas de cálculo valiosas para algunas situaciones, por la economía que procuran y por el alivio que supone la automatización de ciertos mecanismos. La riqueza del trabajo sobre el cálculo –mental y algorítmico– incluye el hecho de que los alumnos se ven confrontados a tener que decidir la estrategia más conveniente frente a cada situación en particular.

El cálculo mental abona la construcción de relaciones que permiten un aprendizaje de las cuentas convencionales basado en la comprensión de sus pasos, en un control de los resultados intermedios y finales que se obtienen. Al mismo tiempo, la finalidad de transmitir los algoritmos vinculados con las operaciones se inserta en el marco de la transmisión de un amplio abanico de recursos de cálculo y de su adecuación con las situaciones que enfrentan. La práctica de cálculo mental, bajo ciertas condiciones, podría hacer evolucionar los procedimientos de cálculo de los alumnos y enriquece las conceptualizaciones numéricas.

En el trabajo con cálculo mental, es necesario disponer de una cierta sistematización de un conjunto de resultados que permite la construcción progresiva de un repertorio de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones disponibles en memoria o fácilmente reconstruibles a partir de aquellos memorizados. Así, por ejemplo, se espera que los alumnos puedan utilizar lo que conocen para las sumas de una cifra (como 4 + 5) para conocer otras con números de dos o más cifras que las involucren (como 40 + 50) o también restas asociadas a ellas (como 90 – 50 y 90 – 40). Para que los alumnos puedan elaborar nuevos recursos, pero que sean fundamentados, se trata, en pocas palabras, de conocer y utilizar resultados memorizados y procedimientos automatizados sobre la base de comprender las relaciones involucradas y del control de las acciones. Tal repertorio de cálculos incluye un gran abanico, muchos de los cuales se abordan en general en años anteriores:

- Sumas de números de 1 cifra entre sí: por ejemplo 5 + 5; 5 + 6; etc.; restas asociadas a dichas sumas: 11 – 5; 11 – 6; etc.
- Identificar descomposiciones de 10 (9 + 1; 8 + 2; 7 + 3, etc.) y de las restas asociadas a ellas (10 – 1, 10 – 2, 10 – 3, etc.); y su uso para la identificación de las descomposiciones aditivas del 100 en números “redondos” (40 + 60, 80 + 20, etc.), y de las restas asociadas a ellas (100 – 40, 100 – 80, etc.).
- Sumas de números “redondos” de dos cifras más un número de una cifra: por ejemplo, 70 + 9; y las restas vinculadas a dichas sumas: por ejemplo, 79 – 9.
- Cálculos que sumen o resten 10 a un número cualquiera; luego, cálculos que sumen o resten 100 a un número cualquiera; etc. Cálculos que sumen o resten un número redondo a un número cualquiera, por ejemplo 3 + 10, 23 + 100, 48 + 300, etc.
- Otras descomposiciones aditivas de los números vinculadas con la organización del sistema de numeración. Por ejemplo, 2.000 + 500 + 40 + 6; 800 + 7; 200 + 19; etc. Restas vinculadas a ellas: por ejemplo 4.271 – 271; 384 – 80; etc.
- Cálculos de complementos de un número cualquiera respecto de un número “redondo” a través del análisis de las escrituras numéricas. Por ejemplo, cuánto es necesario sumarle a 578 para obtener 600.

En el material del alumno se abordará apenas una revisión de aquellos primeros recursos y se profundizará en los siguientes:

- Resultados de la tabla pitagórica (cuadro de doble entrada con los productos hasta 10 x 10) para la multiplicación y uso de esos conocimientos para conocer el cociente y el resto de dividendos menores que 100 y divisores de una cifra.
- Multiplicación por 10; 100; 1.000, etc. División por 10, 100 1.000, etc.
- Descomposiciones multiplicativas de las escrituras numéricas y cálculos asociados a ellas: por ejemplo 3 x 1.000 + 4 x 100 + 5 x 10 + 8; etc.

- Extensión de los conocimientos sobre la tabla pitagórica a multiplicaciones con números "redondos" de más de una cifra. Por ejemplo, usar que 4 x 3 = 12 para encontrar el resultado de 40 x 30; o usar que 2 x 5 = 10 para encontrar el resultado de 200 x 500; o 2 x 6 = 12 para 2.000 x 60; etc.
- Extensión de los conocimientos sobre las divisiones a partir de los resultados de la tabla pitagórica y de la división por 10, 100, 1.000, etc. para resolver otras divisiones que involucran números "redondos" como dividendos y divisores.

Los avances en el "cálculo reflexionado"[3] involucran en forma paralela un progresivo aumento de la memorización y reutilización de resultados, y la construcción de procedimientos personales que permiten dar respuesta a una situación. Al no tratarse de procesos automatizados, consisten en el despliegue de diferentes caminos a partir de decisiones que los sujetos van tomando durante la resolución. Tales decisiones se vinculan con la comprensión de la tarea, con diferentes relaciones que se establecen, con el control de lo que va sucediendo en la resolución.

El cálculo mental permite un trabajo sobre los números de manera descontextualizada, familiariza a los alumnos con una actividad matemática que también encuentra sentido en sí misma: hallar un procedimiento, confrontar diferentes procedimientos, analizar su validez, expresar un mismo número de diferentes maneras. Por ejemplo, *establecer cuáles de las siguientes descomposiciones son equivalentes al número 5.348* requiere analizar el significado de cada una de las cifras en función de su posición y de las relaciones que guarda con las posiciones contiguas y las no contiguas:

a) 5 x 1.000 + 4 x 10 + 3 x 100 + 8
b) 5.000 + 300 + 48
c) 53 x 100 + 48
d) 5.300 + 48
e) 51 x 100 + 24 x 10 + 8
f) 53 x 100 + 40 x 10 + 8

El cálculo mental es una buena ocasión para hacer funcionar las propiedades de las operaciones, para analizar cuándo son pertinentes y cuándo no, para identificarlas. Por ejemplo, para resolver 43 + 99, es posible apoyarse en la suma de 100, apelando a la propiedad asociativa de la suma: 43 + 99 = 43 + 100 – 1 = 143 – 1 = 142.

De este modo, la enseñanza del cálculo mental también ofrece a los alumnos la oportunidad de tomar conciencia de que algunos cálculos son más sencillos que

3 ERMEL (Institut National de Recherche Pédagogique): Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Paris, Hatier, 2001.

otros y es posible valerse de ellos para resolver otros más complejos. Por ejemplo, 24 x 12, puede pensarse como 24 x 10 + 24 x 2. Se apela así a propiedades de las operaciones, haciéndolas intervenir para resolver verdaderos problemas: en este caso, facilitar un cálculo; en otros, demostrar la validez de un procedimiento. El análisis de la validez de dichas reglas, su identificación dentro del cuerpo de conocimientos que dispondrán en adelante los alumnos resultará de un trabajo de reflexión sobre las resoluciones que el docente gestione con toda la clase.

Dentro de las estrategias de cálculo mental, también se espera que los alumnos desarrollen, basándose en los cálculos más sencillos, estrategias de estimación, de cálculo aproximado. Por ejemplo, es posible anticipar la cantidad de cifras que tendrá el cociente de 4.579 : 37, a partir de encuadrarlo entre multiplicaciones por potencias de diez: el cociente buscado es mayor que 100 (porque 37 x 100 = 3.700) y menor que 1.000 (porque 37 x 1.000 = 37.000), es decir tendrá tres cifras. También es posible anticipar que estará más cerca de 100 que de 1.000 (porque 4.579 está más cerca de 3.700 que de 37.000).

Para algunas situaciones, la búsqueda de un resultado aproximado es suficiente; otras, requieren hallar un resultado exacto. Aún en este último caso el cálculo aproximado constituye una poderosa herramienta de anticipación y de control. Por ejemplo, es muy útil poder establecer el número de cifras de un cociente para controlar el resultado de una división realizada con calculadora. Para que los alumnos comiencen a poner en juego la utilización de unas modalidades de cálculo como anticipación y control de otras modalidades es necesario –aunque no suficiente– que el docente "empuje" en esa dirección.

En síntesis, el cálculo mental –incluyendo la construcción de procedimientos más personales y de repertorios de resultados memorizados– provee una ocasión privilegiada de hacer funcionar las propiedades de las operaciones en relación con las características del sistema de numeración posicional y decimal. Permite por esa misma razón una profundización en los conocimientos sobre las operaciones y sobre nuestro sistema de numeración.

He aquí dos grandes propósitos para incluir la enseñanza del cálculo mental: la potencia de su uso para resolver cálculos, problemas en situaciones cotidianas, por una parte; y la posibilidad de iniciar a los alumnos –o profundizar– un tipo de trabajo intelectual propio de las matemáticas: buscar caminos de resolución, compararlos, analizar los errores, validar los recursos nuevos y las soluciones obtenidas, apoyarse en propiedades y resultados para anticipar otros resultados, sistematizar y reorganizar relaciones y recursos, buscar explicaciones a las reglas elaboradas, etc.

La actividad matemática en el aula a propósito del cálculo mental

Las decisiones a cargo del alumno que resuelve, los análisis que puede hacer mientras trabaja, las discusiones acerca de la validez de sus razonamientos con sus pares y con el docente, van tejiendo una red de conocimientos que fundamentan el funcionamiento de los números y de las operaciones. Abrir el juego de la clase a la búsqueda de estrategias, a su explicitación y confrontación, a su circulación y difusión en momentos de intercambio, permite a los alumnos –ayudados por el docente– identificar conocimientos relativos a los números y a los cálculos que debe retener. Al mismo tiempo, los alumnos participan de la construcción de criterios de validación de los procedimientos elaborados (cómo es posible estar seguro de que una estrategia es correcta, cómo mostrar el error de un procedimiento) y de criterios de elección de procedimientos adecuados en función de la tarea. De este modo, al mismo tiempo, se está comunicando a la clase que se espera que las producciones sean validadas y que hay modos de hacerlo, que hay razones que hacen a la corrección o incorrección de las resoluciones, que hay criterios para la selección de modos de resolver más o menos adaptados en función de las situaciones particulares, que no se trata de hechos azarosos. Estos aspectos podrán ser objetos de reflexión en la clase para que puedan ser identificados por los alumnos. Al mismo tiempo, la disponibilidad en memoria de algunos resultados requiere de un aspecto ligado a la práctica.

Es decir, del mismo modo que para todo el trabajo matemático, se apunta a posicionar a los alumnos desde cierta actitud intelectual frente a los problemas: que se animen a abordar con los conocimientos disponibles, a explorar, buscar por diferentes vías, equivocarse, comunicar a otros, analizar la validez de procedimientos, etc. A veces se cree que este posicionamiento depende de aptitudes o voluntades particulares de los alumnos. Desde nuestra opinión, constituye un aprendizaje que atraviesa todo el trabajo matemático y, como tal, deber ser objeto de enseñanza bajo la convicción de que cualquier alumno, a partir de una enseñanza sistemática, puede apropiarse de dichos conocimientos. Buscamos instalarlo en nuestras clases a partir de abrir un tipo de juego, habilitar, sostener prácticas de búsquedas de soluciones y validaciones, dando lugar a una matemática fundamentada, pensada y analizada.

La gestión del docente de las clases de cálculo mental

La enseñanza del cálculo se enmarca pues en el mismo "clima" de trabajo matemático que queremos instalar en cualquier clase de matemática: de búsquedas, reflexiones, discusiones, argumentaciones, producción y análisis de escrituras matemáticas e identificación de nuevos conocimientos. En este sentido, la intervención del docente es fundamental: hacer explicitar y comparar los procedimientos llevando a los alumnos a analizarlos y explicarlos (o colaborando él mismo en estas tareas), constituyen condiciones esenciales para promover avances en los conocimientos producidos en este espacio.

El despliegue del trabajo que se propone no puede quedar relegado a clases aisladas, sino que es necesario organizar una progresión de aprendizajes, planificar una secuencia de enseñanza en la cual cada nuevo conocimiento pueda apoyarse en lo que los alumnos ya conocen, al mismo tiempo que introduce novedades, para nuevos aprendizajes.

Un proceso de esta naturaleza requiere considerar secuencias que involucren una variedad de situaciones que se ocupen de diferentes aspectos de los conceptos y, a la vez, retomen cuestiones tratadas en sucesivas "vueltas". Por ejemplo, las diferentes composiciones y descomposiciones que admiten los números son tratadas para la suma y la resta, luego para la multiplicación y la división, y finalmente se reorganizan a propósito del análisis del sistema de numeración.

Ahora bien, es evidente que los conocimientos de punto de partida de los alumnos son sumamente heterogéneos y dependientes de sus experiencias escolares previas, de su entorno social y familiar, de sus ámbitos y tipos de trabajos, etc. Muchos alumnos adultos se perciben a sí mismos con dificultades para el cálculo. Queremos resaltar que si bien los avances en los recursos de cálculo mental son beneficiosos para todos, lo son en particular para aquellos alumnos que presentan mayor dificultad porque les permite acceder a estrategias que a veces otros elaboran por su cuenta, estrategias que los posicionan mejor ante las situaciones, ya sea porque les abre diferentes posibilidades de solución o porque les permite realizar anticipaciones y un control sobre las soluciones más convencionales.

Puede resultar paradojal que el cálculo mental beneficie más a quienes tienen mayor dificultad para acceder a él. En efecto, a estos alumnos les suele llevar mucho más tiempo la apropiación de estrategias que otros adquieren muy rápidamente. Estas diferencias en los tiempos de adquisición forman parte de la heterogeneidad de conocimientos constitutiva de todos los grupos. Al respecto, tengamos en cuenta la importancia de las intervenciones del docente dirigidas a la difusión, identificación y práctica de ciertos procedimientos de cálculo mental para generar avances en los alumnos que este tipo de prácticas les resulta más complejo.

¿Cómo gestionar esta diversidad? No hay evidentemente una única posibilidad. La organización de las clases deberá planificarse de acuerdo con las intenciones del docente frente a cada situación en particular. A veces, de a dos para promover intercambios en el momento de resolución; a veces, individual, para que cada alumno tenga la oportunidad de interactuar solo frente al problema; a veces, con toda la clase; etc.

Es importante que todos tengan un tiempo para pensar los problemas, de tal manera que las primeras respuestas casi inmediatas de algunos no traben la posibilidad de que cada uno se introduzca en la tarea propuesta. Otras veces, los alumnos podrán trabajar en pequeños grupos mientras el docente se dedica especialmente a aquellos que más lo necesitan. Es decir, en algunas ocasiones, podrán gestarse algunos espacios diferenciados que posibiliten la revisión de conocimientos (repertorios, procedimientos, reglas) de manera más sistemática para algunos.

Cuando se busca que los alumnos exploren procedimientos de resolución, las anotaciones de lo que van realizando son esenciales. Lo son por varios motivos. Por un lado, constituyen un soporte para pensar la solución, tanto para recordar pasos y resultados intermedios como para reflexionar sobre el procedimiento que se está siguiendo, en tanto la escritura "exterioriza" algunos aspectos de ese conocimiento, convirtiéndolo de ese modo en objeto de análisis. Por otro lado, constituyen medios de comunicación de los procedimientos, indispensable cuando se trata de explicitarlos ante la clase.

Señalamos la necesidad de identificar los nuevos conocimientos que se van elaborando en el transcurso de actividades de cálculo mental y de las discusiones generadas a partir de ellas. No basta con que se expliciten y validen los procedimientos y las reglas establecidas, sino que es necesario que algunos procedimientos sean reconocidos y nombrados por el docente y se desarrolle una práctica en torno a ellos que permita cierta automatización. Esto a veces puede resultar difícil: ¿qué poner en común acerca de procedimientos ajustados a situaciones particulares?, ¿cuáles son los aspectos generalizables de dichos procedimientos? Sabemos que el aprendizaje no es lineal. El proyecto de enseñanza propondrá situaciones abordables desde diferentes conocimientos, al mismo tiempo que se adaptará a la progresión de cada clase y de cada alumno en particular.

El uso de la calculadora

La inclusión de la calculadora en el trabajo matemático resulta esencial por diversos motivos. Por un lado, como se ha convertido en una herramienta de cálculo muy extendida en la sociedad –llegando incluso a modificar los hábitos de cálculo–, sostenemos que la formación matemática de los alumnos debe incluir el aprender a decidir cuándo utilizarla y, para ello, su uso, en términos generales, debe estar plenamente autorizado.

Muchas veces, los docentes admiten el uso de la calculadora para que sus alumnos verifiquen cálculos resueltos de otro modo; otras veces, lo admiten para hallar resultados queriendo aliviar la tarea del cálculo para que puedan centrarse en otras relaciones involucradas en un problema. Estos son los usos más habituales cuando se autoriza este recurso. Sin embargo, habrá momentos en los que, dado el asunto específico que se esté trabajando, el maestro decidirá no habilitarla.

Queremos resaltar otro uso posible, menos extendido y, sin embargo, sumamente relevante. Muchas veces las situaciones planteadas requieren usos particulares de la calculadora, usos que no necesariamente están en función de obtener un resultado. Es así como, en ciertas situaciones, la calculadora será una herramienta para explorar propiedades, para encontrar una regularidad, para validar un procedimiento; en otras, su beneficio radicará en la posibilidad de constatar de manera inmediata –e independiente del docente– los resultados de anticipaciones que se le han solicitado al alumno. Por ejemplo, hallar cuál sería el resto de una división realizada con la calculadora que haya arrojado un cociente con coma si se tratara de una división entera, requiere poner en acción una serie de relaciones entre el cociente, el divisor, el dividendo y el resto, es decir constituye un punto de partida para llevar adelante un análisis sobre las relaciones internas entre los diferentes números que intervienen en esta operación. En pocas palabras, la calculadora también constituye un soporte sobre el cual proponer problemas y una dinámica de trabajo muy fructíferos desde el punto de vista de los conocimientos que pone en escena.

La reflexión sobre las actividades que se vayan realizando permitirá ir construyendo tanto una actitud de control sobre la utilización de la calculadora como la elaboración de conocimientos que permitan hacer efectivo este control. Por esa razón, el trabajo con calculadora no degrada ni reemplaza el tratamiento de los cálculos convencionales con lápiz y papel u otros cálculos mentales, sino que lo enriquece.

Acerca de este documento

Este documento presenta un análisis de las secuencias de actividades propuestas en el documento del alumno referidas a los siguientes ejes de contenidos:

- Suma y resta
- Multiplicación y división
- Sistema de numeración
- ¿Qué aprendimos? (actividades de “repaso”)

Dentro de cada uno de ellos, las actividades se ordenan según una progresión de dificultades. Analizaremos la intención de algunos problemas, las posibles respuestas de los alumnos y algunas maneras de organizar las clases.

Sumas y restas

Este capítulo apunta a traer a la escena del aula estrategias de cálculos mentales de sumas y restas posiblemente conocidas y usadas por los alumnos adultos. Es de algún modo una entrada en tema que permitirá, a partir de un recorte más sencillo de problemas, instalar un cierto tipo de práctica en la clase: probar, explorar, comparar soluciones y procedimientos, analizar errores, reconocer nuevos recursos que han circulado, etc.

Muchos de estos recursos serán luego punto de apoyo para el trabajo con multiplicación y división, y luego con sistema de numeración. Si el docente considerase que dichos conocimientos están muy disponibles por los alumnos, podrá iniciar el trabajo en el segundo capítulo: Multiplicación y división. Y si, por el contrario, evaluara que algunos alumnos tienen disponibles recursos de cálculos sencillos de sumas y restas, deberá promover su aparición con actividades anteriores a las aquí presentadas.

ACTIVIDAD 1. Sumas y restas con números redondos y "casi redondos"

El problema 1 apunta a trabajar inicialmente con los cálculos de suma y resta que posiblemente tengan memorizados los alumnos. Seguramente los cálculos reconocidos y recordados por los alumnos sean muy heterogéneos y por ello será interesante difundirlos para que circulen entre todos y permitan acrecentar el repertorio individual.

Luego se propondrán cálculos que son sencillos de hacer mentalmente usando, como punto de apoyo, los ya memorizados. Para resolverlos se pondrán en juego descomposiciones y composiciones de los números. Es importante explicitar a los alumnos que cualquier cálculo admite muchas formas de resolución. El trabajo exploratorio, además, generará la aparición de algunos resultados erróneos. Su análisis colectivo permitirá discutir por qué lo son.

Problema 1

a) Resuelva los siguientes cálculos:

1.000 + 1.000 =	3.000 + 3.000 =
400 + 400 =	350 + 350 =
2.000 + 2.000 =	250 + 250 =
500 + 500 =	1.500 + 1.500 =
4.000 – 3.000 =	450 – 50 =
2.345 – 345 =	1.500 – 1.000 =

b) Si conocía algunos resultados "de memoria" o pudo obtenerlos de inmediato, márquelos.

c) Los siguientes cálculos no se suelen recordar de memoria, pero resolverlos puede ser sencillo:

3.500 + 3.500 =	2.000 + 2.000 + 450 =
2.000 + 900 =	1.900 + 100 =
750 + 750 =	2.500 + 3.500 =
990 – 90 =	3.900 – 1.000 =
450 – 400 =	

d) Anote algunas sumas y restas que sepa de memoria:

____

Se espera llegar a establecer relaciones del tipo:
"600 + 800 es como 6 + 8 pero le agregás dos ceros";
"como 4 + 6 = 10, 40 + 60 = 100; 400 + 600 = 1.000; 1.000 – 400 = 600",
"si 7 – 2 = 5; 700 – 200 = 500", etc.

Es interesante analizar aquellos procedimientos basados en descomposiciones que permiten "hacer pie" en un número "redondo". Por ejemplo, para 560 + ... = 610, es posible ir sumando 560 + 40 = 600; 600 + 10 = 610, se sumaron, entonces, 40 + 10 = 50. También es posible pensar que, como 6 + 5 = 11; 60 + 50 = 110, entonces 560 + 50 = 500 + 60 + 50 = 500 + 110 = 610.

También es pertinente explicitar la estrategia de apoyarse en un número redondo al resolver una resta. Por ejemplo, para "ir" de 2.300 a 1.900 se puede pensar que, si se restan 300, se "cae" en el 2.000 y luego hay que restar otros 100, resulta entonces que hay que restar 400. Se puede hacer notar asimismo que el cálculo 9 + 4 = 13 ó 13 – 9 = 4 pueden ser "puentes" al resultado: si 13 – 9 = 4, 23 – 19 = 4, entonces 2.300 – 1.900 = 400. Se podrá pedir a los alumnos que anoten cálculos como éstos que puedan resolverse a partir de las sumas y restas conocidas por ellos.

El problema 2 instala una nueva cuestión.

Se trata de que los alumnos puedan apoyarse en cálculos relativos a números redondos para pensar otros. Así, por ejemplo, para sumar o restar 90, es posible sumar o restar 100 y luego restar o sumar 10 respectivamente, para sumar 99 es posible sumar 100 y luego restar 1, etc. Se espera que estas formas de resolución queden identificadas para toda la clase y registradas en formulaciones del tipo: *"Restar 900 es equivalente a restar 1.000 y agregarle 100"*; etc.

El análisis posterior de cada problema permitirá considerar las estrategias posibles y explicar las razones de su funcionamiento. La identificación conjunta de las mismas es central para que su uso se extienda y comience a estar disponible para todos.

Problema 2

Para resolver estos cálculos puede ser muy útil sumar o restar 10, 100, 1.000 y después agregar o quitar lo que falta. Por ejemplo, para 213 + 9 se puede hacer 213 + 10, que es más fácil, y luego sacarle 1. Para 250 + 101 es posible hacer 250 + 100 y al resultado sumarle 1.

a) Busque una manera de averiguar el resultado de:

243 + 99 =	1.362 + 99 =
2.240 + 900 =	3.572 + 990 =
368 + 9 =	262 – 90 =
5.639 – 900 =	1.970 – 99 =

b) Busque una manera de averiguar el resultado de:

864 + 11 =	864 + 101 =
529 + 11 =	529 + 101 =
963 + 101 =	7.305 + 101 =
7.305 + 1.001 =	7.305 + 11 =

Se considerarán también otros procedimientos que, según los números, también puedan resultar pertinentes. Se busca que el recurso a los cálculos con números redondos se encuentre disponible pero no que se convierta en un procedimiento único anulando la riqueza de la diversidad de posibilidades que abre el cálculo mental.

ACTIVIDAD 2. Estimaciones de sumas y restas

En esta actividad se propone trabajar con estrategias de cálculo aproximado basadas en conocimientos sobre el sistema de numeración y en el uso de las propiedades de las operaciones.

La estimación en cálculos aritméticos consiste en la posibilidad de realizar aproximaciones a resultados, sin necesidad de hallar una respuesta exacta. Como el grado de aproximación puede variar, hay varias respuestas igualmente válidas para un mismo cálculo. La estimación busca rapidez, por ello utiliza números "redondos" para facilitar las operaciones.

Es importante que la estimación se convierta en objeto de enseñanza, por un lado, porque forma parte de conocimientos matemáticos básicos de los cuales debe disponer todo ciudadano por su potencia para anticipar y controlar cálculos; por otro lado, por su valor para la comprensión de las propiedades del sistema de numeración y de las operaciones.

La estimación constituye una herramienta de solución frente a problemas –como el Problema 1 de esta actividad– para los cuales basta con una respuesta aproximada o como modo de anticipación y de control frente a problemas que requieren buscar una respuesta exacta.

En el problema 2 los alumnos podrán determinar, por medio del redondeo, el resultado aproximado para poder responder a la pregunta planteada, esta vez ya en forma de cálculo descontextualizado.

En el Problema 3, si bien aparecen tres resultados para cada caso, éstos ya están dados, y los números elegidos hacen que no sea necesario llegar a calcular el resultado exacto porque las aproximaciones permiten ir descartando los inválidos.

Las estimaciones pueden requerir diferente nivel de precisión. A veces, basta con sólo referirse a las unidades de orden mayor, como sucede en la pregunta a) del Problema 1: aunque se redondee el celular a 200 y la licuadora a 200 igualmente será menor que 500. Otras veces, es necesario avanzar haciendo un análisis más exhaustivo. Por ejemplo, en la pregunta a) del Problema 3, si solo se consideraran las centenas, no puede determinarse si el resultado será del orden de los 300 o de los 400, es necesario tener en cuenta que 30 + 80 supera los 100, por lo tanto el resultado supera los 400.

Las situaciones que requieren –o admiten– la estimación no constituyen una práctica habitual. En general, las actividades suelen solicitar un resultado exacto. Por ello, es posible que inicialmente los alumnos rechacen involucrarse en una exploración sobre cálculos aproximados. Muchos alumnos expresarán que prefieren hacer el cálculo exacto. Como ya mencionamos, la

Problema 1

Trate de responder las preguntas sin hacer el cálculo exacto:

Lista de precios

Heladera $ 966	Lavarropas $ 458
Microondas $ 283	Estufa $ 322
Licuadora $ 135	Celular $ 185

a Para comprar el celular y la licuadora, ¿alcanzan $ 500?
b) Para comprar el lavarropas y el microondas, ¿alcanzan $ 600?
c) Para comprar la heladera y el celular, ¿alcanzan $ 1.000?

Problema 2

a) 966 – 204 ¿será mayor o menor que 300?
b) 669 – 578 ¿será mayor o menor que 400?
c) 897 + 234 ¿será mayor o menor que 1.000?

Problema 3

Para cada uno de los siguientes cálculos hay tres opciones, pero solo una de ellas es correcta. Sin hacer la cuenta, analice las opciones y marque cuál le parece que es el resultado correcto:

a) 235 + 185 =	620	320	420
b) 567 – 203 =	464	264	364
c) 186 + 238 =	424	224	324
d) 639 – 278 =	361	461	261

Analicen entre todos las diferentes formas que utilizaron para saber "más o menos" los resultados sin hacer cuentas.

necesidad de buscar una manera de estar seguros de que cierta respuesta es o no correcta sin apelar a los resultados, "invita" a recurrir a las propiedades utilizadas. Será necesario entonces sostener la propuesta, alentar la búsqueda, mostrar estrategias, explicitar las ventajas de dominar estrategias de estimación sea por la rapidez que procuran o porque permiten anticipar y controlar resultados para cálculos exactos.

En estas tareas es importante retomar las diversas estrategias que se pongan en juego para difundir en la clase aquellas que queremos que todos los alumnos aprendan. El docente podrá anotar en el pizarrón, y los alumnos copiar en sus cuadernos o carpetas, los cálculos involucrados en dichas estrategias. A su vez, será necesario justificar la validez de las mismas, basándose en cálculos ya conocidos o en conocimientos sobre el sistema de numeración. En otras oportunidades, cuando se trate de sumar o restar requiriendo cálculos exactos, el docente podrá pedir primero que estimen el resultado. Tales estimaciones funcionarán allí como control de los resultados obtenidos. Ahora bien, para que puedan funcionar como control el docente debe enseñar tanto procedimientos de estimación, como su uso a modo de recurso de control de los cálculos.

En los análisis colectivos sobre estas actividades –y en muchas otras– el docente deberá apelar a que los alumnos expliquen cómo pensaron sus propuestas. Se trata de que expliciten las razones que llevan tanto a elegir como a rechazar una cierta opción, ya que en ambos casos se movilizan relaciones que enriquecen las ideas acerca de lo numérico. Por ejemplo, elaborar explicaciones para el problema 3.b (determinar cuál de los tres resultados corresponde a 567 – 203), tales como 500 – 200 = 300 o bien 567 – 200 = 367, y entonces la respuesta será 364. Solicitar explicaciones comunica a la clase que el trabajo matemático incluye la elaboración de argumentos que justifiquen los resultados que se van encontrando y que los mismos están ligados a la puesta en marcha de procedimientos basados en propiedades y en ciertos razonamientos.

ACTIVIDAD 3. Cálculo de distancias entre números

En esta actividad se trabajan los siguientes contenidos: cálculo de complementos a cien, a unidades de mil o decenas de mil a partir del análisis de las escrituras numéricas y relaciones entre suma y resta.

Para estos problemas puede resultar interesante habilitar el uso de la calculadora porque exige a los alumnos anticipar el cálculo y, al hacerlo efectivamente en la máquina, es posible recibir una verificación inmediata de esa anticipación. Se les puede pedir que anoten el número que sumarán y que, antes de comprobarlo con la calculadora, busquen una manera de estar seguros de lo que han anticipado.

Estas situaciones permiten poner en relación la suma y la resta. Así, por ejemplo, el Problema 1 ofrece la posibilidad de discutir que una suma puede resolverse a partir de una resta. Para buscar cuánto hay que sumarle a 40 para obtener 100, una estrategia frecuente consiste en buscar el complemento mediante una suma, pero también podría averiguarse por medio de una resta. Se trata de analizar colectivamente la relación entre estos procedimientos basados en la suma (40 + 60 = 100) y la resta (100 – 40 = 60).

Problema 1

Complete el cuadro:

¿Cuánto hay que sumarle a ….	para obtener …?	Respuesta	Anote acá los cálculos que necesite para averiguarlo
40	100		
1.200	2.000		
350	1.000		
699	3.000		
2.455	10.000		
6.189	7.200		
199	10.000		
9.999	50.000		

Inversamente, en el problema 2, para averiguar cuánto hay que restarle a 3.000 para obtener 2.500, los alumnos podrán averiguar cuánto hay que sumarle a 2.500 para llegar a 3.000 (pensar 2.500 + 500 = 3.000) o bien restar ambos números. Para 4.000 a 1.200 también podrán realizar sumas parciales: 1.200 + 800 = 2.000 y luego seguir de 1.000 en 1.000 hasta 4.000. Un aspecto a identificar es cómo se rescata de esos cálculos parciales cuál es la respuesta al problema dado, ya que, en los procedimientos más frecuentes, la respuesta no coincide con el resultado de un cálculo. Reconstruir 3.800 a partir de las sumas parciales será objeto de trabajo. Identificar la resta entre ambos números (3.000 – 2.500) para determinar la resta que hay que realizar (3.000 – 500 = 2.500) también exigirá cierto trabajo colectivo.

Problema 2

Complete el cuadro:

¿Cuánto hay que sumarle a ….	para obtener …?	Respuesta	Anote acá los cálculos que necesite para averiguarlo
3.000	2.500		
4.000	1.200		
4.500	400		
2.300	1.000		
470	320		
3.450	1.100		
267	155		

La riqueza del trabajo de cálculo mental incluye el hecho de que los alumnos se ven enfrentados con tener que decidir la estrategia más conveniente. La posibilidad de los alumnos de abordar los problemas dependerá de la familiaridad que tengan con este tipo de actividades, de sus conocimientos sobre el sistema de numeración, el redondeo, etc. Si no recurrieran a las estrategias que estamos planteando, será importante sostener el trabajo, modificando los números en juego si fuera necesario, pero insistiendo en la propuesta ya que se aspira a que puedan dominar estas relaciones como un aspecto más de sus progresos en el terreno del cálculo.

De la misma manera, también se pretende que los criterios que se usan para dar por válida una cierta estrategia vayan avanzando y dejen de ser “sabemos que está bien porque nos dio lo mismo”, para progresivamente acercarse a “sabemos que está bien porque nos apoyamos en estas relaciones que sabemos que son correctas”.

El trabajo planteado no se agota en la resolución y en la constatación de quienes obtuvieron el resultado correcto sino que, como en la mayoría de las propuestas de actividades, suponen un momento de discusión colectiva donde se debate qué estrategias se utilizaron y de qué manera se puede estar seguro de que el resultado obtenido es o no correcto.

Si se asume que esta fase colectiva es parte del trabajo de producción matemática, hay dos aspectos que cobran relevancia: a) cómo identificar qué cuestiones merecen discutirse y b) en qué situaciones puede resultar interesante que los alumnos confronten sus puntos de vista.

Por último, quisiéramos remarcar algunas particularidades esenciales del papel del docente en la clase. El maestro es el encargado de señalar cuál ha sido la estrategia nueva o la que en este caso ha permitido cierta economía, tiene la responsabilidad también de difundir ese conocimiento, de hacerlo público y favorecer su circulación en el aula. Al mismo tiempo, es igualmente importante que sugiera registrar a sus alumnos las conclusiones a las que han arribado para que puedan ser recordadas, solicitadas en otras oportunidades y utilizadas como una herramienta cuando resulte pertinente.

ACTIVIDAD 4. Analizar la conveniencia de hacer sumas y restas con cálculo mental, con calculadora, con cuentas o con estimaciones

Esta actividad no presenta cálculos. La intención es promover un trabajo reflexivo sobre las diferentes estrategias de cálculo estudiadas, determinando la conveniencia en el uso de cada una de ellas, según la situación y según los números involucrados. Se trata de un espacio colectivo de retorno sobre lo realizado y análisis de los recursos disponibles.

Problema 1

Busquen entre todos ejemplos de diferentes casos en los que sea conveniente obtener el resultado de distintos modos: con un cálculo mental, con calculadora, con cuentas o con estimaciones.

Multiplicación y división

ACTIVIDAD 1. Tabla de multiplicaciones

La actividad 1 se propone instalar un análisis y sistematización del repertorio de productos de la tabla pitagórica. El análisis propuesto gira en torno a explorar las relaciones de proporcionalidad involucradas en las multiplicaciones.

En el primer problema, los alumnos completarán la tabla para luego, en los problemas 2, 3 y 4, analizar diferentes relaciones que permiten conocer algunos resultados de la tabla de multiplicación a partir de otros. Se trata de que los alumnos puedan construir una red de relaciones que les faciliten la memorización de algunos productos o una reconstrucción a partir de resultados memorizados. Por ejemplo, recordar 7 x 8 sabiendo que es el doble de 7 x 4, o el cuádruple de 7 x 2, o a partir de 5 x 8 + 2 x 8, o de 7 x 10 – 7 x 2; etc.

Problema 1

La siguiente es una tabla de multiplicaciones que se llama Tabla Pitagórica. La inventó el matemático y filósofo Pitágoras en Grecia hace más de dos mil quinientos años. Complétela con los resultados de las multiplicaciones.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Pero, además de facilitar la memorización o reconstrucción de resultados, es un modo de introducir a los alumnos en el uso y la reflexión sobre las propiedades de las operaciones. Será interesante compartir esta intención con los alumnos. Poner en palabras estas propiedades permitirá reutilizarlas en numerosos problemas y cálculos. No nos referimos estrictamente al nombre de las propiedades sino a lo que se pone en juego en cada una de ellas.

El trabajo sobre la tabla pitagórica completa será una oportunidad para analizar la regularidad en la multiplicación por 5 y por 10, los resultados de las multiplicaciones por 0 y por 1 como casos especiales y también para identificar que hay diferentes multiplicaciones que dan el mismo resultado: por ejemplo para los siguientes números: 24, 18, 30, 32, 36, etc.

Una de las propiedades por analizar es la propiedad conmutativa de la multiplicación. Será interesante identificar cómo los resultados se reiteran a partir de un eje de simetría constituido por una diagonal del cuadro. Esto, basado en la conmutatividad de la multiplicación, permite reconstruir una mitad del cuadro a partir del conocimiento de la otra mitad. Esta propiedad será la más sencilla de identificar: los productos 3 x 4 y 4 x 3 son equivalentes y esto sucede con todos los productos de la tabla. Identificarlos y usarlos será facilitador de muchos otros cálculos. Además, hace que baste con memorizar casi la mitad de los productos del cuadro (los únicos que no se repiten son 4 x 4, 5 x 5, etc.).

Otra propiedad a explicitar refiere a las relaciones entre las filas o columnas del 2 y del 4, donde los resultados de la segunda son el doble de los de la primera; al igual que entre el 4 y el 8; entre el 3 y el 6; el 5 y el 10. O las relaciones entre la fila o la columna del 2 y del 8, donde los resultados de la segunda son el cuádruple de los de la primera; o del 9 y del 3, donde los resultados de la primera son el triple de los de la segunda. Evidentemente esta relación involucra la propiedad asociativa: multiplicar por 8 es equivalente a multiplicar por 4 y por 2 o multiplicar por 9 es equivalente a multiplicar por 3 y por 3.

También es posible establecer que los resultados de la fila o la columna del 7 pueden reconstruirse sumando los resultados de las filas o columnas del 3 y del 4; o restando, por ejemplo los resultados de multiplicar por 3 a las multiplicaciones por 10, etcétera. Del mismo modo, es posible conocer los resultados de otras multiplicaciones, tales como las multiplicaciones por 9 a partir de sumar los resultados de multiplicar por 4 y por 5; por 7 y por 2, o de restar 9 al resultado de multiplicar por 10; etcétera. Esta relación es la menos evidente para los alumnos y resulta importante que el docente la presente para su reconocimiento y análisis. La propiedad que está en juego en estas relaciones es la propiedad distributiva: 5 x 8 = 5 x 3 + 5 x 5.

Usando estas relaciones, si no se recuerda el producto 9 x 8, es posible reconstruirlo a partir de 9 x 4 x 2; o 9 x 5 + 9 x 3; o 9 x 8 = 5 x 8 + 4 x 8 o bien 9 x 10 – 9 x 2, entre otras posibilidades.

Los problemas 2, 3, 4 y 5 apuntan a analizar dichos aspectos:

Si el docente evaluara la necesidad de seguir trabajando con estas relaciones, se les pueden proponer tablas pitagóricas con algunos errores para ser corregidas por los alumnos. También a partir de la calculadora, es posible plantear problemas que requieran reconstruir un resultado de la tabla pitagórica a partir de otros. Por ejemplo: *"Si en la calculadora tuviera que hacer las siguientes multiplicaciones pero no funcionara la tecla del 8, ¿cómo podría hacerlas?*

4 x 8 = 6 x 8 = 7 x 8 =
¿Y si tuviera que hacer estas otras sin usar la tecla del 7?
4 x 7 = 10 x 7 =5 x 7 =

Problema 2

Analicen la verdad o falsedad de estas afirmaciones (preferentemente en parejas):

- Todos los números están repetidos. ☐
- En la fila y en la columna del 5 todos los números terminan en 0 o en 5. ☐
- En la columna del 10 todos los resultados son el doble que los de la del 5. ☐
- Los resultados de la columnas del 2 son la mitad que los de la del 4. ☐
- Todos los números multiplicados por 0 dan 0. ☐
- Todos los números multiplicados por 1 dan 1. ☐

Problema 3

a) Busquen columnas o filas en las que los resultados sean el doble o el triple de los de otra columna o fila. Pueden analizar qué sucede con las del 3, el 6 y el 9, por ejemplo.

b) Los resultados de la fila o la columna del 7 pueden reconstruirse sumando los resultados de las filas o columnas del 3 y del 4. Analicen si también sucede lo mismo sumando los de 5 y 2 y los de 6 y 1.

c) ¿Qué resultados se obtienen al multiplicar cualquier número por 0? ¿Y por 1?

Problema 4

Es posible hacer 4 x 8 mediante otros cálculos usando las propiedades de la multiplicación:

- Si se usa la propiedad asociativa, se puede descomponer el 8 y hacer, en lugar de 4 x 8, este otro cálculo: 4 x 2 x 2 x 2, y da el mismo resultado.
- Si se usa la propiedad conmutativa, se puede alterar el orden de los números y en lugar de 4 x 8, hacer 8 x 4, y da el mismo resultado.
- Si se usa la propiedad distributiva, se puede desarmar el 8 y en lugar de hacer 4 x 8, hacer 4 x 5 + 4 x 3, y da el mismo resultado.

A partir de lo anterior, escriba otros cálculos que den el mismo resultado que:

6 x 9 =
7 x 6 =
5 x 8 =
10 x 7 =

Todo este bagaje de conocimientos constituirá una trama que contribuirá al trabajo sobre la multiplicación, aspectos y relaciones que serán retomadas y complejizadas en actividades siguientes.

Problema 5

Aquí hay varios cálculos. En algunos casos las equivalencias son verdaderas y en otros, no. Coloque V o F en cada una. Intente analizarlas usando las relaciones entre números de los problemas anteriores.

8 x 9 = 8 x 3 x 3	☐	☐
9 x 9 = 9 x 2 x 3	☐	☐
9 x 6 = 9 x 2 x 3	☐	☐
5 x 10 = 5 x 5 x 5	☐	☐
5 x 10 = 5 x 2 x 5	☐	☐
5 x 9 = 5 x 10 - 5	☐	☐
7 x 7 = 7 x 5 + 7 x 2	☐	☐
3 x 9 = 3 x 5 + 3 x 4	☐	☐
3 x 9 = 3 x 3 x 3	☐	☐

ACTIVIDAD 2. La tabla pitagórica para resolver divisiones

Aquí se trata de que los alumnos usen el repertorio multiplicativo para resolver divisiones exactas, de analizar las relaciones entre multiplicación y división y resolver divisiones a través de la búsqueda del factor desconocido de una multiplicación.

Esta actividad está dirigida a que los alumnos tomen conciencia de que al conocer el resultado de una multiplicación, pueden también conocer el resultado de, al menos, dos divisiones. Así, a partir de 6 x 7 = 42, es posible afirmar que 42 : 7 = 6 y 42 : 6 = 7. Para los alumnos, no resulta evidente que buscar el factor desconocido de una multiplicación equivale a dividir el producto por el otro factor: relacionar ambas búsquedas debe ser objeto de análisis de la actividad.

Problema 1

a) ¿Cuál de estos números multiplicado por 5 da 40?
5 8 10

b) ¿Cuál es el número que, multiplicado por 7, da 21?
6 3 9

c) ¿Cuál es el número que, multiplicado por 8, da 32?
7 3 4

d) Un número, multiplicado por 7, da 56. ¿Qué número es?

Problema 2

A partir de los resultados de la tabla pitagórica, calcule:

a) 36 : 6 =
b) 48 : 8 =
c) 81 : 9 =
d) 36 : 4 =
e) 42 : 7 =

Para continuar, el docente podrá proponer, y pedir a los alumnos que propongan, diferentes divisiones que sea posible resolver a partir de los resultados de la tabla pitagórica. También será interesante pedirles que anoten las diferentes divisiones que pueden conocer para un mismo dividendo que figure en la tabla. Por ejemplo, cada 24 de la tabla corresponde a una multiplicación y, a partir de ella, se pueden conocer dos divisiones.

ACTIVIDAD 3. Multiplicación y división por 10; 100 y 1.000 y por otros números terminados en ceros

Esta actividad aborda cuestiones de cálculo que están relacionados con el sistema de numeración. Se trata de reconocer y usar las reglas de la multiplicación y división por 10; 100 y 1.000 y extenderlas como puntos de apoyo para resolver otros cálculos.

Se parte de una primera situación contextualizada (cajas y tornillos) y luego se presentan cálculos directamente. Los problemas 3 y 4 intentan provocar que los alumnos se acerquen a formulaciones del tipo: *"si tenemos un número multiplicado por 10 va a terminar con cero", "si se le agregaron dos ceros es porque se multiplicó por 100".*

Esta actividad pone en juego la relación entre el sistema de numeración y la multiplicación y división por potencias de la base y múltiplos de ellas con una sola cifra distinta de cero (10, 100, 1.000, etc. y números como 20; 500; 3.000; etc., respectivamente). Estas cuestiones serán retomadas en el 3º capítulo y a la luz del análisis de las características de nuestro sistema de numeración se podrá avanzar en comprender y explicitar que agregar o quitar ceros está vinculado al valor posicional y a la idea de agrupamiento en base 10.

Los problemas 5 y 6 apuntan a trabajar la división por la unidad seguida de ceros.

Luego, en el problema 9 se apunta a que los alumnos amplíen su repertorio multiplicativo, incluyendo reglas automatizadas para estos cálculos por otros números seguidos de ceros y apoyándose también en las multiplicaciones conocidas desde la tabla pitagórica.

Así, por ejemplo, como señalábamos recién, es importante detenerse a analizar que, por ejemplo, 4 x 60 es equivalente a 4 x 6 x 10 porque la cifra 6 en 60 significa 6 veces 10, entonces 4 x 60, equivale a hacer 4 veces 6 x 10 o sea 4 x 6 x 10. Por esa razón, es posible apelar a 4 x 6 para luego multiplicarlo por 10. Estas equivalencias se fundamentan en las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación. El docente podrá volver sobre estos procedimientos de cálculo mental para analizar cómo intervienen en ellos dichas propiedades.

La consigna "Entre todos escriban una regla para multiplicaciones y divisiones por cualquier número

Problema 1

En un taller guardan los tornillos en cajas de 10 tornillos, de 100 tornillos y cajas de 1.000 tornillos.

a) ¿Cuántos tornillos hay en 3 cajas de 10? ¿Y en 15 cajas de 10?
b) ¿Cuántos tornillos hay en 7 cajas de 100? ¿Y en 22 cajas de 100?
c) ¿Cuántos tornillos hay en 9 cajas de 1.000? ¿Y en 45 cajas de 1.000?

Problema 2

Resuelva los siguientes cálculos:

25 x 10 =	64 x 10 =
345 x 10 =	3.456 x 10 =
25 x 100 =	64 x 100 =
345 x 1.000 =	3.456 x 100 =

Problema 3

¿Cuáles de estos números podrían ser el resultado de una multiplicación por 10?

168	7.980
7.809	9.800
5.076	3.460

Problema 4

Calcule mentalmente:

a) 45 x .... = 4.500
b) 128 x .... = 1.280
c) 17 x .... = 17.000
d) ..... x 10 = 320
e) .... x 100 = 800
f) .... x 100 = 1.300
g) .... x 1.000 = 7.000
h) .... x 1.000 = 29.000

Problema 5

a) En una librería quieren ordenar los sobres. Si tienen 450 y los ponen en paquetes de a 10, ¿cuántos sobres arman?, ¿les sobran?

b) Y si tienen 5.600 sobres y los ponen en paquetes de 100, ¿cuántos arman?, ¿les sobran?

c) Y si tienen 6.700 y los ponen en paquetes de 10, ¿cuántos arman?, ¿les sobran?

Problema 6

Dividir por 10, 100 y 1.000 seguramente también les resulte muy sencillo para estos números. Intente resolverlos, sin hacer la cuenta de dividir.

340 : 10 =	3.400 : 100 =
34.000 : 10 =	45.00 : 100 =
24.530 : 10 =	230.000 : 100 =

terminado en ceros. Intenten explicar por qué funciona" tiene la intención de que los alumnos, además de reconocer y usar la regla de agregar o quitar ceros, puedan involucrarse en analizar por qué se agregan o se quitan. La automatización debe ir precedida y acompañada por un trabajo de elaboración y reflexión que permita establecer múltiples relaciones que garanticen la comprensión, de modo tal que la apelación automática a dichas reglas no pierda la posibilidad de control sobre su uso. Estas explicaciones serán retomadas en el capítulo "Sistema de Numeración".

Problema 7

a) ¿Cuáles de estos cálculos darán lo mismo que 4 x 2 x 10? Intente resolverlo sin hacer cada una de las cuentas. Puede consultar las propiedades enumeradas en el Problema 4 de la Actividad 1.

80 x 10	10 x 4 x 2
8 x 10	8 x 5 x 2
6 x10	4 x 2 x 5 x 2
4 x 20	

b) ¿Cuáles de estos cálculos darán lo mismo que 32 x 10? Intente resolverlo sin hacer cada una de las cuentas. Puede consultar las propiedades enumeradas en el Problema 4 de la Actividad 1.

8 x 4 x 10
4 x 2 x 4 x 10
8 x 40
10 x 32
3 x 10 + 2 x 10
10 x 10 + 10 x 10 + 10 x 10 + 2 x 10

Problema 8

a) Anote una única operación que deberá hacerse para que, a partir del número que aparece en la columna de la izquierda, surja en el visor de la calculadora el número escrito en la columna de la derecha.

Número original	Cálculo	Número "transformado"
28		280
6		120
470		47
8		2.400
6.300		63
12		3.600
4.000		40

Si lo considera necesario, puede verificar con la calculadora.

b) Escriba qué cálculos son necesarios para pasar de un número al siguiente:

7.000		1.000		10		180		6

59		59.000		59		5.900		590

Si lo considera necesario, puede verificar con la calculadora.

Problema 9

Saber los resultados de la tabla pitagórica y a la vez saber cómo multiplicar por 10, 100 y 1.000 son conocimientos muy útiles para hacer rápidamente multiplicaciones por 20, 30, 40, 50, etc., o también por 200, 300, 400, etc.

Calcule mentalmente:

4 x 60 =	12 x 20 =
15 x 30 =	200 x 70 =
.... x 200 = 800	8 x ... = 320
.... x 50 = 1.000	.... x 50 = 4.000

Entre todos escriban una regla para multiplicaciones y divisiones por cualquier número terminado en cero. Intenten explicar por qué funciona.

ACTIVIDAD 4. Usar la multiplicación por números "redondos" para otras multiplicaciones

En esta actividad se analizará cómo usar cálculos más sencillos para hacer otros más complejos, a partir de las relaciones entre ellos. Por ejemplo, para hacer 102 x 8, es posible pensar 100 x 8 y 2 x 8 y sumar ambos resultados. O para hacer 99 x 8 es posible hacer 100 x 8 y luego restarle 8. Para hallar la solución de estos problemas, posiblemente algunos alumnos intenten resolver cada cálculo nuevamente y les cueste reconocer la utilidad de apoyarse en otros cálculos conocidos o dados. Será necesaria la intervención del docente tanto para mostrar su utilidad práctica como para enfatizar que la intención es el análisis de los números y de las operaciones que dichos procedimientos ponen en juego.

Se apunta a que los alumnos usen la propiedad distributiva, más allá de que no recuerden su nombre ni sea exigido en estos problemas. Se trata de poder pensar cómo, por ejemplo, multiplicar por 19 es equivalente a multiplicar por 20 y luego por 1 y restar ambos resultados, o para multiplicar por 21, sumarlos.

Problema 1

a) Intente usar el cálculo 3 x 20 = 60 para resolver estos otros cálculos:
3 x 21
3 x 22

b) Para hacer 3 x 19, ¿es correcto pensar 3 x (20 – 1) = 3 x 20 – 3 = 60 – 3 = 57? Puede consultar el Problema 4 de la Actividad 1 y las propiedades que allí se enuncian.

c) Intente resolver estos cálculos a partir de pensar en la multiplicación x 20:
5 x 19 =
7 x 19 =
30 x 19 =

Problema 2

Calcule mentalmente estos productos usando la multiplicación por números "redondos"y las relaciones de los problemas anteriores.

a) 5 x 29 =
b) 7 x 49 =
c) 3 x 19 =
d) 6 x 21 =
e) 5 x 22 =
f) 4 x 53 =

Esta actividad está dirigida a que los alumnos reutilicen y generalicen los conocimientos identificados en los problemas que anteceden: las multiplicaciones con números "redondos" sirven de apoyo para multiplicaciones con otros números particulares. Así, la multiplicación por 20 permite conocer productos por 19, 21, 18, 22, 17; la multiplicación por 30 a productos por 31, 29, etcétera.

Procedimientos como estos se basan en la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y de la resta. Retomarla será una oportunidad de hacerla funcionar frente a un problema de cálculo y reconocer allí su valor como herramienta para facilitar los cálculos o para probar la validez de un procedimiento.

Un error muy frecuente en problemas como éstos consiste en que los alumnos multipliquen por 20 y resten 1 para multiplicar por 19. Si no surgiera en la clase, sería interesante que el docente muestre a los alumnos dicha estrategia errónea para someterla al análisis. Es fundamental instalar en el grupo la necesidad de controlar, por ejemplo para 3 x 19, cómo es posible estar seguro de que se hicieron 19 veces 3, explicitando que, al hacer 20 veces 3, hay que restar 1 vez 3, y no 1. Veamos otro problema:

Problema 3

A partir del cálculo 15 x 30 = 450:

a) ¿Qué multiplicaciones podría escribir de las que esté seguro de los resultados sin tener que calcularlos?
b) Compare con algún compañero si se les ocurrieron los mismos.

Se espera que los alumnos puedan reconocer que a partir de este cálculo pueden hacer otros, por ejemplo 16 x 30, o 15 x 31 a partir de agregar o quitar el producto por 1 al resultado. O bien que pueden –apoyándose en otra propiedad–, hacer 15 x 60 o 30 x 30, usando dobles, o usando la multiplicación por la unidad seguida de ceros hacer 15 x 300 o 1.500 x 30.

El siguiente problema permite trabajar sobre las escrituras de dichas descomposiciones y el uso de propiedades. No se le solicita al alumno que explicite qué propiedades pone en juego cada relación, sino que las use para determinar, anticipadamente, sin hacer cuentas, la verdad o falsedad de dichas equivalencias.

Problema 4

Coloque V o F. Intente hacerlo sin hacer todas las cuentas.

4 x 75 = 4 x 70 + 5 x 70 ☐
51 x 17 = 50 x 17 + 1 x 17 ☐
99 x 12 = 100 x 12 – 12 ☐

ACTIVIDAD 5. Más cálculos a partir de uno conocido

Se trata de que los alumnos sigan avanzando en identificar cómo los resultados ya conocidos nos permiten averiguar otros usando composiciones y descomposiciones de los números. Los contenidos de esta actividad son cálculos mentales de multiplicaciones y divisiones apoyándose en propiedades de las operaciones y del sistema de numeración; relaciones entre la multiplicación y la división, y las descomposiciones de cada uno de los factores y el producto. Analicemos algunos problemas presentados a los alumnos:

Problema 1

Estas multiplicaciones son correctas:

2 x 28 = 56   3 x 28 = 84
4 x 28 = 112   5 x 28 = 140

Úselas para completar la tabla. Podrá resolver cada parte de varias maneras diferentes.

x 28	8	6	10	20	30	40	50	100

Esta actividad apunta a identificar diferentes relaciones entre las multiplicaciones, que posibilitan distintos caminos de búsqueda para cada uno de los productos solicitados. Por un lado, hay relaciones entre las multiplicaciones presentadas y los cálculos que hay que resolver. Por ejemplo, se podrá calcular 8 x 28 haciendo el doble de 112, a partir del producto ya dado de 4 x 28. O bien, averiguar el resultado de 6 x 28 a partir de sumar 56 + 128 a partir de considerar que multiplicar por 6 puede obtenerse sumando la multiplicación x 4 y x 2. Por otro lado, hay relaciones entre las multiplicaciones que se solicita averiguar. Por ejemplo, una vez que se averiguó el producto de 10 x 28, puede usarse ese resultado para averiguar x 20.

De este modo, por ejemplo, es posible calcular:

- 8 x 28, sabiendo que 8 es el doble de 4, por lo tanto ese producto será el doble de 4 x 28;
- 6 x 28 haciendo el doble de 3 x 28; el triple de 2 x 28; restando 1 vez 28 a 4 x 28; o haciendo 5 x 28 – 2 x 28;
- 10 x 28, resulta un producto conocido fácilmente ya por los alumnos; es posible reconocer también que es el doble de 5 x 28.

- 20 x 28 a partir del doble de 10 x 28; de 2 x 28 x 10; de 5 x 4 x 28; etc.

El docente podrá recordar las relaciones entre las tablas de multiplicación analizadas a propósito de la tabla pitagórica. Veamos otro problema:

Problema 2

a) A partir de los siguientes resultados de multiplicaciones por 34, se pueden encontrar los resultados de otras multiplicaciones por 34. Por ejemplo, para averiguar 12 x 34 se puede usar 10 x 34 y 2 x 34, y sumar ambos resultados. Intente resolverlas.

Multiplicaciones x 34 ya resueltas:

1 x 34 = 34	2 x 34 = 68
3 x 34 =102	4 x 34 = 136
5 x 34 = 170	6 x 34 = 204
7 x 34 = 238	8 x 34 = 272
9 x 34 = 306	10 x 34 = 340

Multiplicaciones x 34 para resolver usando las anteriores:

12 x 34 =
16 x 34 =
21 x 34 =
35 x 34 =

Puede verificar los resultados con la calculadora si lo considera necesario.

b) Anote otras tres multiplicaciones que también se puedan calcular con la ayuda de los resultados que aparecen en la tabla anterior.

En este problema se reutilizan los recursos trabajados en las actividades anteriores, en particular la multiplicación por potencias de la base y algunos múltiplos de ellas. Por ejemplo, para averiguar 12 x 34 se puede usar 10 x 34 y 2 x 34, y sumar ambos resultados. Será importante detenerse a analizar por qué de esa manera se garantiza "hacer 12 veces" el número dado.

Los problemas 3, 4 y 5 apuntan también a usar cálculos dados para averiguar el resultado de otros, sin hacer cuentas y usando las propiedades de las operaciones y de los números.

Problema 3

Resuelva los siguientes cálculos sin hacer cada cuenta. Para averiguar los resultados puede usar las multiplicaciones que se ofrecen como datos y también las que va resolviendo:

a) A partir de 3 x 40 = 120 calcule:

3 x 400 =	30 x 40 =
3 x 80 =	6 x 40 =
9 x 40 =	

Se retoma y avanza en la consideración de relaciones entre los factores que no están sólo ligadas al sistema de numeración y la facilidad que aporta para ciertos cálculos como la multiplicación y división por 10; 100; 1.000; etc. sino que incluyen relaciones entre factores y productos tales como multiplicar por 9 es el triple que multiplicar por 3; multiplicar un número por 60 es equivalente a sumar los productos parciales que resultan de multiplicar ese número por 40 y por 20; o restar los productos parciales que resultan de multiplicarlo por 80 y por 20; etcétera.

Se podrá apelar también, como ya se ha hecho mención para otras actividades, a los productos[1] conocidos sobre la base de la tabla pitagórica. Por ejemplo, es posible conocer 80 x 40 a partir de 8 x 4. Otra cuestión importante que se retoma aquí es la relación entre multiplicaciones y divisiones: cómo es posible, a partir de una multiplicación, conocer dos divisiones o, a partir de una división exacta, conocer una multiplicación y otra división. Así, por ejemplo, si 3 x 40 = 120, entonces: 120 : 3 = 40 y 120 : 40 = 3.

[1] Usaremos el término producto para hacer referencia al resultado de una multiplicación.

Este conjunto de actividades pone de relieve las relaciones internas entre los factores y el producto de una multiplicación, cómo varían unos en relación con las variaciones de otros. En el problema 5, por ejemplo, para 220 x 30 sabemos que ese producto supone 100 x 30 más el producto 120 x 30. Este recurso apela entonces al uso de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y de la resta, por ejemplo, para 320 x 30, se puede pensar: 320 x 30 = (120 + 200) x 30 = 3.600 + 6.000 = 9.600.

El problema 6 apunta a usar estas relaciones en un caso específico: multiplicar por 5 o por 50 pensado como multiplicar por 10 o por 100, y luego dividir el resultado por 2, a partir de que 5 = 10 : 2 y que 50 = 100 : 2. Veamos una parte:

Se espera que, a partir de este problema, la clase llegue a identificar que *"multiplicar por 5 es como multiplicar por 10 y dividir por 2"*, y esta relación se generalice a otras multiplicaciones relacionadas con aquélla, tales como multiplicar por 50 o multiplicar por 25 pensado como multiplicar por 100 y luego dividir por 2 o por 4. Los alumnos, conducidos por el docente, podrán advertir una regularidad que se cumple en estos ejemplos: pareciera que multiplicar por 5 *"es lo mismo que agregar un cero y dividir por 2"*. Se pedirá entonces a los alumnos que exploren si la regla "vale" para otros ejemplos. Luego será necesario avanzar intentando buscar una explicación a la regularidad descubierta: se apunta a establecer que multiplicar por 5 es equivalente a multiplicar por 10 y dividir por 2 (es decir, si se hace la mitad de 10 veces, se está haciendo 5 veces el número dado). Si los alumnos no logran identificar esta relación, el maestro podrá explicarla. Quizás sea pertinente también analizar que puede cambiarse el orden en el que se realizan las operaciones para multiplicar por 5. En efecto, hasta este momento la estrategia utilizada fue multiplicar por 10 y luego dividir por 2, pero bien podría primero dividirse primero por 2 y luego multiplicar por 10.

b) A partir de 24 x 15 = 360
calcule:

24 x 30 =	48 x 15 =
240 x 150 =	24 x 45 =
24 x 60=	

Problema 4

a) A partir de usar 30 x 40 = 1.200, intente calcular cuánto será 1.200 : 30. ¿Y 1.200 : 40?

b) Sin hacer toda la cuenta, a partir de la división 2.400 : 30 = 80 y de las cuentas que va resolviendo, anote los resultados de los cálculos:
2.400 : 80 =
80 x 30 =
2.400 : ..... = 30
2.400 : ..... = 8
2.400 : 8 =

c) Si usa 20 x 80 = 1.600, ¿qué divisiones podría escribir de la que esté seguro de los resultados sin tener que calcularlo?

Problema 5

Se sabe que 100 x 30 = 3.000 y que 120 x 30 = 3.600. Calcule, sin hacer las cuentas, los resultados de:

a) 220 x 30 =
b) 320 x 30 =
c) 420 x 30=

Para cada caso, escriba los cálculos que precisó hacer para pensarlo.

Problema 6

Cuando tenemos que averiguar el resultado de una multiplicación por 5, a veces es más sencillo hacer la multiplicación por 10 y luego averiguar la mitad. También se puede averiguar el resultado de multiplicar por 50 multiplicando por 100 y luego calculando la mitad.

a) Anote el resultado de los cálculos. Use el primero para averiguar el segundo.

18 x 10 =	44 x 100 =
18 x 5 =	44 x 50 =
120 x 10 =	58 x 100 =
120 x 5 =	58 x 50 =

b) Calcule mentalmente. Puede usar la multiplicación por 10 o por 100 primero.

24 x 5 =	38 x 50 =
72 x 5 =	24 x 50 =
15 x 5 =	36 x 50 =

Entre todos piensen cómo se podrían resolver multiplicaciones por 500 y por 25 a partir de hacer multiplicaciones por 1.000 y 100.

En el Problema 7 se espera que los alumnos exploren una regularidad: al dividir por 5 a un número que termina en cero, *"es como sacarle el cero y multiplicarlo* *por 2"*. Se trata de que la clase llegue a identificar que, si se reparte en partes iguales una misma cantidad entre 5, a cada uno le corresponderá el doble que si se reparte entre 10, porque se está repartiendo entre la mitad de partes. Por eso, al dividir por 5, es posible dividir por 10 (y aprovechar la facilidad que procura la división por 10) y luego averiguar el doble de esa cantidad.

También aquí se podría analizar que el orden en el cual se realicen la división y la multiplicación señaladas no altera el resultado. Es decir, sería posible calcular el doble del número dado y, luego, dividirlo por 10: si una cantidad dada se reparte en partes iguales entre 5 personas, a cada una le toca lo mismo que si se reparte (siempre en partes iguales) el doble de esa cantidad entre 10 personas. Veamos el problema:

Problema 7

También es posible usar la división por 10 ó por 100 para resolver divisiones por 5 ó por 50. Pero a veces es difícil saber si va a dar la mitad o el doble. Intente anticipar las respuestas a estas preguntas:

a) 480 : 5, ¿dará el doble o la mitad que 480 : 10?

b) 560 : 50, ¿dará el doble o la mitad que 560 : 100?

Finalmente, entre todos, pueden corroborar con la calculadora e intentar formular una regla para saber, sin hacer la cuenta de dividir, si el resultado de una división por 5 ó por 50 será el doble o la mitad.

Finalmente, entre todos pueden corroborar con la calculadora e intentar formular una regla para saber, sin hacer la cuenta de dividir, si será el doble o la mitad.

ACTIVIDAD 6: Estimación de productos

La actividad 6 presenta nuevamente la estimación como recurso de cálculo, pero esta vez para la multiplicación. La intención es que los alumnos puedan sistematizar sus recursos de cálculo aproximado, tanto para resolver problemas en los que hay que averiguar "más o menos" cuánto da, como para anticipar y controlar los resultados de cálculos obtenidos por medio de otros recursos: el cálculo algorítmico o el cálculo con calculadora, el cálculo mental. Una estrategia para estimar es "redondear". Por ejemplo, para hacer 389 x 99, pensar cuánto daría 400 x 100 y así obtener un resultado aproximado. El problema 1 presenta un primer caso contextualizado:

Problema 1

a) En 11 cajas de 500 alfileres, ¿habrá más o menos de 5.000 alfileres?

b) En 111 cajas de 100 ganchitos mariposa, ¿habrá más o menos de 10.000 ganchitos?

Ya en los problemas siguientes se presentan directamente nuevos cálculos solicitando que usen cálculos dados para determinar si el producto de otros será mayor o menor que el ya dado. Este tipo de situaciones también implica aprender a "leer" cálculos, interpretar la información que proveen, y que es pertinente para ser usada en el nuevo asunto por resolver. Veamos partes de los problemas 2 y 3:

Problema 2

A partir de usar estos cálculos:

24 x 10 = 240
24 x 100 = 2.400
24 x 1.000 = 24.000
24 x 10.000 = 240.000

Decida si:

a) 24 x 26 va a dar un número mayor, menor o igual a 300.
b) 24 x 1234 va a dar un número mayor, menor o igual a 24.000
c) 24 x 754 va a dar un número mayor, menor o igual a 24.000
d) 24 x 11.111 va a dar un número mayor, menor o igual a 200.000

Entre todos expliquen las diferentes maneras que usaron para responder.

Se espera que los alumnos puedan elaborar ideas como las siguientes: "si 24 por 10 es 240, 24 x 30 tiene que ser el triple y eso da mucho más que 300".

El Problema 4 presenta opciones de encuadramiento del producto en cálculos dados. Será necesario que el docente enfatice que el tipo de práctica que se le solicita no implica realizar la cuenta exacta, sino que se espera que, a través del redondeo y el cálculo mental, puedan establecer entre qué números se encontrará el resultado.

La intención es que los alumnos puedan pensar, por ejemplo, "648 está cerca de 600 y 11 es cerca de 10, dará cerca de 6000. O bien "si redondeamos para arriba sería 700 x 20 y como 7 x 2 es 14, daría 14.000.Verificar con la calculadora apunta a que los alumnos puedan, por sus propios medios, controlar si sus anticipaciones han sido correctas y analizar los errores producidos.

El problema 5 exige determinar cuál puede ser el resultado posible de varias multiplicaciones. Se espera que los alumnos puedan, a partir del redondeo, determinar el tamaño aproximado del producto. En el primer caso, por ejemplo, pensar que 436 x 25 es cercano a 400 x 30 y dará cerca de 12.000, o bien que no puede ser 290 porque es menor que 436, ni puede ser 5.900 porque 400 x 20, "redondeando para abajo" da 8.000 y ya es mayor que 5.900. Será interesante hacer circular diferentes estrategias posibles, eligiendo los resultados más cercanos al redondeo, descartando los que son excesivamente pequeños o grandes, redondeando para arriba o para abajo, etc.

El Problema 6 tiene una intención específica: que los alumnos tomen conciencia de la utilidad del cálculo estimativo para determinar márgenes importantes de error en cálculos algorítmicos. A veces un pequeño error en una cuenta produce un resultado imposible por el tamaño del número. Muchas veces los docentes utilizamos la estimación para determinar la imposibilidad de que un resultado sea correcto. Se trata de involucrar

Problema 3

A partir de estos cálculos:
36 x 10 = 360
36 x 100 = 3.600
36 x 1.000 = 36.000
36 x 10.000 = 360.000

Decida si:
400 x 36 va a dar un número mayor, menor o igual a 3.000.

a) 3.500 x 36 va a dar un número mayor, menor o igual a 40.000.
b) 9.898 x 36 va a dar un número mayor, menor o igual a 360.000.
c) 15.000 x 36 va a dar un número mayor, menor o igual a 400.000

Problema 4

Para cada una de las multiplicaciones que figuran en la siguiente tabla, indique en qué columna debería colocarse el resultado. Debe anticiparlo sin hacer la cuenta. Redondear le será de gran ayuda.

Cálculo	Entre 0 y 10	Entre 10 y 100	Entre 100 y 1.000	Entre 1.000 y 10.000	Entre 10.000 y 100.000
5					
648					
49					
34					
1.575					
99					
94					
5230					
3					

Problema 5

Para cada una de las siguientes multiplicaciones elija cuál le parece que será el resultado, sin hacer cuentas. "Redondeando" podrá tener una idea, ya que los tres números elegidos son de tamaños diferentes.

a)	436 x 25	290	5.900	10.900
b)	60 x 45	27	2.700	270
c)	1.238 x 9	11.142	1.142	142
d)	732 x 120	87.840	87.840.000	8.000.080

Puede verificar los resultados con la calculadora, si le quedan dudas.

a los alumnos en este tipo de práctica, que deberá ser sostenida en otros trabajos cada vez que los alumnos se enfrenten a tener que hacer cuentas. La pregunta: "¿será un resultado posible?" les será de mucha utilidad para controlar sus propias producciones.

Problema 6

Mire los resultados de estas cuentas, ¿hay alguna en la que le parece imposible que el resultado escrito sea correcto? Puede ayudarse pensando en multiplicaciones por números "redondos". Por ejemplo, para pensar cuánto dará más o menos la cuenta 489 x 18 es posible redondear "para arriba" 489 a 500 y 18 a 20. Y como 500 x 20 da 10.000, entonces 489 x 18 tendrá que dar menos que 10.000.

2.345	5.678	479
x 22	x 99	x 19
4.580	56.780	9.101

ACTIVIDAD 7: Estimación de cocientes

Esta propuesta presenta mayores dificultades respecto de la estimación de productos. Darse cuenta de si el cociente se agranda o se achica cuando se agrandan o achican dividendo y divisor, o en cuánto, es mucho más complejo que para la multiplicación. Veamos los problemas:

Problema 1

A partir de los siguientes cálculos
240 : 10 = 24 y por lo tanto 240 : 24 = 10
2.400 : 100 = 24 y por lo tanto 2.400 : 24 = 100
24.000 : 1.000 = 24 y por lo tanto 24.000: 24 = 100

Decida si:

a. 244 : 10 va a dar un número mayor, menor o igual a 24.
b. 2.000 : 24 va a dar un número mayor, menor o igual a 100.
c. 23.598 : 24 va a dar un número mayor, menor o igual a 1.000.

En el problema 1, para 244 : 10 se espera que, por ejemplo, los alumnos puedan analizar que, como 240 : 10 es 24, entonces 244 : 10 deberá ser mayor que 24. El docente podrá remitir al contexto de reparto preguntando, por ejemplo, para a), si se reparten 240 pesos en partes iguales a 10 personas cada una recibe 24, ¿cada una recibirá más o menos que 24 si se reparte, en lugar de 240 pesos, 244 pesos? De manera similar, se podrá proceder con el resto de ítems. Se apunta a comenzar a identificar de qué modo las multiplicaciones por 10; 100; 1.000; etc. permiten anticipar la cantidad de cifras del cociente de una división.

Problema 2

A partir de:
36 x 10 = 360
36 x 100 = 3.600
36 x 1.000 = 36.000
36 x 10.000 = 360.000

Decida si:

a) 400 : 36 va a dar un número mayor, menor o igual a 10.

b) 3.500 : 36 va a dar un número mayor, menor o igual a 1.000.

c) 9.898 : 36 va a dar un número mayor, menor o igual a 1.000.

d) 39.000 : 36 va a dar un número mayor, menor o igual a 10.000

En el segundo problema se complejiza aún más la tarea del alumno. Deberá establecer, por ejemplo, que si 36 x 10 = 360; entonces 360 : 36 = 10 y por lo tanto 400 : 36 dará más que 10, porque "hay más para repartir" a la misma cantidad de gente.

El siguiente problema exige a los alumnos encuadrar el cociente, es decir identificar entre qué números podría estar el cociente. Podrán, para lograrlo, recurrir a estrategias diferentes que será interesante hacer circular en la clase. Por ejemplo, una vía de acceso será el redondeo y otra la multiplicación por la unidad seguida de ceros.

Para 5.940 : 24 es posible pensar que es cercano a 5.000 : 25 y como 50 : 25 es 2, dará 200 y por lo tanto estará entre 100 y 1.000. Un recurso más económico será pensar 24 x 10 da 240 y está muy lejos de 5.940; 24 x 100 dará 2.400 y se acerca bastante, 24 x 1.000 es 24.000 y ya se pasó. Con lo cual el cociente estará entre 100 y 1.000. Si esta estrategia no surgiera entre los alumnos, el docente podrá mostrarla y analizar su funcionamiento.

Problema 3

Para muchas divisiones es muy cómodo usar la calculadora. Pero, como a veces un error al apretar una tecla nos puede hacer obtener un resultado muy alejado de lo posible, es muy útil pensar antes "entre qué números estará más o menos" el cociente. Resuelvan las siguientes actividades en parejas.

a) Sin hacer la cuenta exacta, indiquen en qué columna debería colocarse el cociente.

Cálculo	Entre 0 y 10	Entre 10 y 100	Entre 100 y 1.000	Entre 1.000 y 10.000
5.940 : 24				
3.648 : 12				
492 : 41				
347 : 18				
15.675 : 12				
4.699 : 16				
9.428 : 8				

a) Inventen dos divisiones más en las filas vacías.

b) Al finalizar, pueden controlar con la calculadora.

Nuevamente, si la tarea le planteara dificultad a algunos alumnos, el docente podrá, por ejemplo para 5.940 : 24, remitir a 24 x 10; 24 x 100; 24 x 1.000, apelando si fuera necesario al contexto del reparto:

- si se entregan $ 10 a cada una de 24 personas, ¿cuánto dinero se reparte?;
- ¿y si se entregan $ 100?
- Entonces, al repartir 5.940 entre 24, ¿le toca más o menos que 100 a cada uno?
- Y si se entregan $ 1.000 a cada uno, ¿cuánto dinero se reparte? Entonces, al repartir 5.940 entre 24....
- Etcétera.

En este problema, algunos de los números propuestos se eliminan por descarte. Por ejemplo, para el primer caso 436 : 35, el cociente no puede ser 10 porque ya 35 x 10 = 350 y será entonces mayor que 10. Si tomamos 100 x 35 = 3.500, se "pasa" mucho de 436, algunos dirán que está más cerca de 10 y otros de 50. Para decidir cuál de los otros dos números está más cerca del cociente, puede seguirse el mismo razonamiento: 10 x 35 = 350 y 20 x 35 = 750, "parece más cercano a 10 que a 50" porque con 20 "ya me paso".

Problema 4

Para cada una de las siguientes divisiones señale el número que le parezca más cercano al cociente. Nuevamente, para hacerlo, puede "redondear" para acercarse. Por ejemplo, si se trata de 436 : 35 se puede pensar como 400 : 40. Luego, verifique con la calculadora.

a) 436 : 35	50	10	100
b) 6.000 : 55	100	200	300
c) 8.932 : 105	8	80	800
d) 817 : 21	4	400	40

Es decir, se retoma aquí una primera anticipación del cociente sobre la base de la multiplicación del divisor por 10; 100; 1.000 y cómo obtener una precisión mayor a partir de ellas usando la multiplicación por otros números seguidos de ceros (20, 200, 300, etc.).

ACTIVIDAD 8: Relacionar cuentas con cálculos mentales

Esta actividad apunta a que los recursos desplegados de cálculo mental sean utilizados para reconstruir y comprender los algoritmos convencionales. Muchos adultos los usan, los conocen, otros los quieren aprender por la fuerte presencia que aún tienen en las escuelas. Esta actividad apunta a que los alumnos tomen conciencia de las descomposiciones y cálculos que subyacen a los algoritmos de multiplicación y división.

Una cuestión esencial en el trabajo del aula será fomentar el uso y el análisis de algoritmos diferentes. No es necesario homogeneizar las escrituras de los cálculos parciales, ni los "modos de decir" que suelen acompañar a los cálculos algorítmicos cuando se los acompaña de un recitado en voz alta ("me llevo uno", "bajo el 4", "al 8 ¿cuánto le está?","le pido uno"). En lugar de proponer estos modos de escribir y de decir únicos, se podrá proponer una circulación de variados recursos que permitan comprender las composiciones y descomposiciones, los cálculos parciales que se realizan, las diferentes maneras de abordar una misma cuenta. En el material del alumno se presentan los cálculos "escondidos" en una multiplicación y en una división:

Existen muchas maneras de hacer un mismo cálculo. Algunas cuentas que conocen son una versión económica producida a lo largo de muchos años. Y "esconden" muchos cálculos intermedios. Mostraremos esos cálculos "escondidos" en una multiplicación y en una división. Por ejemplo:

```
   1 1
  2.323
   x 24
  -----
   9.292
+ 4.646
  -----
  55.752
```

en realidad este cálculo no muestra que se está realizando, en el segundo caso, una multiplicación por 20, y no por 2. Por eso anotaremos el 0 de 2.323 x 20:

```
   2.323
    x 24
  ------
   9.292
+ 46.460
  ------
  55.752
```

Y si escribimos qué multiplicaciones estamos realizando, nos queda:

```
   2.323
    x 24
  ------
   9.292 (2.323 x 4)
+ 46.460 (2.323 x 20)
  ------
  55.752
```

Y si lo descomponemos aún más, el mismo cálculo también podría hacerse así:

```
   2.323
    x 24
  ------
  23.230 (2.323 x 10)
+ 23.230 (2323 x 10)
   9.292 (2323 x 4)
  ------
  55.752
```

Y en la división, esta es una cuenta bastante corta, que muchos usan:

```
7.835   25
  33    313
   85
   10
```

Si escribimos en esa cuenta las restas, quedaría:

```
7835    25
-75     313
  33
 - 25
    85
   -75
    10
```

Y si escribimos también el número "entero" que le restamos (ya que estamos multiplicando 25 por 300 y no por 3, y 25 por 10 y no por 1), quedaría:

```
 7.835    25
-7.500    3 1 3
   335    c d u
 - 250
    85
   -75
    10
```

Y si para no confundirnos escribimos que el primer 3 de 313 es un 300, el 1 de 313 es un 10 y el 3 es 3, y también escribimos qué multiplicaciones por 25 hacemos en cada caso, entonces la cuenta quedaría:

Además de que los alumnos puedan apropiarse de diferentes maneras de hacer cuentas, se propone un trabajo colectivo de reflexión sobre las estrategias de cálculo algorítmico:

Analicen entre todos:

a) Las diferentes maneras presentadas de hacer un mismo cálculo.
b) ¿Qué “pasos intermedios” en cada cuenta prefiere cada uno registrar para equivocarse menos?
c) Compartan si conocen otras formas de hacer cuentas para multiplicar y dividir, organizando los números de otra manera o con otros cálculos auxiliares.
d) ¿Cómo se puede usar la estimación para controlar los resultados de cuentas exactas?
e) ¿Con qué clases de números conviene hacer cálculos mentales y cuándo conviene hacer cuentas?

Se espera instalar un análisis acerca de las necesidades individuales de registro de cálculos parciales, así como hacer circular las estrategias exitosas de cada uno de los alumnos, aún cuando disten de las convencionales. Los errores también serán sometidos a análisis colectivo, ya que se constituirán en fuente de aprendizajes para todos. Será necesario que el docente enfatice el valor de la heterogeneidad de recursos, de escrituras, de “explicaciones orales” y la importancia de que cada alumno se apropie de algunos recursos nuevos y se sienta cómodo con ellos, pudiendo controlar, mediante estimaciones, cálculos mentales y calculadora, los resultados obtenidos. Se espera también mostrar la conveniencia de los cálculos mentales para ciertos números (400 x 12) frente al cálculo algorítmico para otros números (359 x 27) y la del cálculo con calculadora para otros (3.452.343 x 5.436).

Sistema de numeración

En este capítulo se retoman propiedades de nuestro sistema de numeración, propiedades que se han puesto permanentemente en juego en las estrategias de cálculo mental desplegadas en capítulos anteriores, y que aquí se sistematizarán. El agrupamiento en base 10 y la posicionalidad son características que favorecen cálculos mentales con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones por la unidad seguida de ceros. En los problemas que siguen se busca promover un trabajo reflexivo en torno a dichos cálculos. Muchos de los problemas apuntan al análisis de las escrituras numéricas para profundizar la mirada acerca de lo que ellas informan.

La Actividad 1 inicia esta clase de problemas con cálculos sencillos que apuntan a realizar composiciones y descomposiciones aditivas. Estos primeros cálculos favorecen una primera explicitación acerca del valor posicional y las transformaciones que se operan en cada una de las cifras al sumar y restar algunos números. Posiblemente algunos de estos problemas podrían intercalarse con los Capítulos anteriores, dado que resultan bastante sencillos, por ejemplo los primeros cuatro problemas. Si el docente evaluara la necesidad, podrían retomarse al iniciar el trabajo con los problemas más complejos.

ACTIVIDAD 1: Sumar y restar para armar y desarmar números

Los problemas 1 y 2 tienen la intención de que los alumnos puedan identificar cómo se "arma" el número teniendo en cuenta el valor posicional de las cifras. Por ejemplo, para el 1º ítem, se pretende que aparezcan explicaciones como *"escribo el 3 de 3.000, el 3 de 300, el 3 de 30 y el 3"*. También el recurso a la oralidad permitirá reconstruir el nombre del número y luego escribirlo: *"tres mil más trescientos más treinta y tres es tres mil trescientos treinta y tres"*. O, para el 4º ítem: *"escribo el 8 de 8.000, el 4 de 400, un 0 para los dieces o decenas y un 4 y se arma 8.404"*, *"lleno las unidades de mil con un 4, las decenas con otro 4 y las unidades con 4, el resto de las posiciones con 0"*, *"cuatro mil más cuarenta es cuatro mil cuarenta; y más cuatro, son cuatro mil cuarenta y cuatro"*, etc.

Para el problema 3 será interesante que el docente aliente a encontrar y hacer circular diferentes descomposiciones aditivas, por ejemplo 8.000 + 670 + 5; 8.000 + 600 + 75; 8.600 + 75, etc. Ello implicará poner en juego las relaciones entre las posiciones contiguas, aspecto que será retomado en varios problemas de la Actividad siguiente.

Problema 1

a) 3.000 + 300 + 30 + 3 =
b) 4.000 + 40 + 4 =
c) 3.000 + 400 + 20 + 1 =
d) 8.000 + 400 + 4 =

Problema 2

¿Con cuáles de estas sumas se arma 7.777?

7.000 + 7
7.700 + 7
7.000 + 700 + 77
7.000 + 707 + 70
7.000 + 70 + 7

Problema 3

Escriba varias sumas con números redondos que permitan armar el número 8.675.

____
____
____

G.C.B.A.

El problema 4 tiene la intención de que los alumnos puedan identificar que el análisis de la posición de cada cifra que se suma permite anticipar el resultado. Se espera que puedan, luego de resolver el problema, arribar a ideas como las siguientes: *"al sumar 111 a 3.456 aumentará en 1 la cifra de las unidades, de las decenas y de las centenas"* o *"sube en 1 el 6, sube en 1 el 5 y sube en 1 el 4"*.

Problema 4

Intente resolver estas sumas sin hacer las cuentas. Puede ser de ayuda anticipar cómo van a cambiar las cifras y cuáles van a cambiar.

3.456 + 1.111 =
3.456 + 111 =
3.456 + 101 =
3.456 + 1.101 =

De manera inversa, se espera, a través del problema 5, que los alumnos puedan identificar que para que el 6 se transforme en 0 habrá que restar 6, ó 60 ó 600 ó 6.000 según de "cuál 6 se trate". El análisis del valor de posición de cada una de las cifras permitirá anticipar el número a restar, sin hacer cuentas.

Problema 5

a) ¿Qué número habrá que restar a 6.666 para que quede 6.606? ¿Qué número habrá que restar a 6.666 para que quede 6.066?

b) ¿Qué número habrá que restar a 9.876 para que quede 9.800? ¿Qué número habrá que restar a 9.876 para que quede 9.076?

c) ¿Qué número habrá que restar a 8.765 para que quede 8.005? ¿Qué número habrá que restar a 8.765 para que quede 8.705?

Analicen entre todos cómo hacer las sumas de estos problemas y cómo darse cuenta de cuánto hay que restar sin hacer cuentas.

La siguiente consigna tiene la intención de promover un momento colectivo de trabajo sobre los cinco problemas, que apunte a sistematizar y organizar los nuevos conocimientos producidos:

Si bien muchos de estos problemas propuestos podrán resultar muchísimo más sencillos que algunos de los ya realizados en capítulos anteriores, serán un buen punto de partida para avanzar, en la actividad siguiente, en descomposiciones multiplicativas.

ACTIVIDAD 2. Monedas de $1 y billetes de $10 y $100

Los problemas de esta actividad involucran el análisis de las escrituras numéricas en el contexto del dinero. El recurso a este contexto favorece –como ha sido suficientemente estudiado y documentado– que los alumnos desplieguen variados recursos de cálculo y puedan imaginar las descomposiciones, inicialmente, en términos de billetes y monedas de 100, 10 y 1. Se espera que los alumnos puedan avanzar hacia diferentes descomposiciones aditivas y multiplicativas de un número, basadas en la organización decimal del sistema de numeración, progresivamente sin apoyarse en el contexto del dinero.

Si bien en nuestro sistema monetario hay billetes de $2, de $20 y de $50, en estos problemas solamente analizaremos qué sucede con los de $ 100, los de $ 10 y monedas de $ 1, ya que el interés es resolver problemas en los que haya que descomponer y componer los números teniendo en cuenta la información que ofrece la escritura del número.

Se aclara en el material del alumno:

El objetivo del Problema 1 es que los alumnos "entren" en la situación. Es de esperar que, al hacerlo, adviertan que las cifras que escriben en cada una de las casillas son las del número. Este hecho constituirá uno de los aspectos que el maestro propondrá analizar una vez que el cuadro haya sido terminado.

Una segunda cuestión a discutir es el hecho de que el número "porta" cierta información. Se busca que los alumnos avancen en la posibilidad de interpretar la información que una escritura numérica ofrece. Así, por ejemplo, "mirando" el número 398 puede saberse que una descomposición posible para ese número es 3 x 100 + 9 x 10 + 8. Se trata justamente de aprender a ver información, que tal vez antes pasaba inadvertida.

Estas primeras relaciones son una base para explorar otras más complejas que ponen en juego las relaciones de valor entre posiciones contiguas como, por ejemplo, 15 x 100 + 3 x 1 para 1.503. Este análisis se inaugura con las últimas cantidades del problema 1 y se retoma en el Problema 2.

Los alumnos tendrán que poner en juego las relaciones entre las diferentes posiciones: 1 de 1.000 es equivalente a 10 de 100; 1 de 100 equivale a 10 de 10, etcétera ya que al no haber billetes de 1.000 para formar 3.200 precisarán 32 de 100, o al no "haber más" billetes de 100 para formar 1.475 precisarán 147 billetes de 10.

El Problema 3 intenta avanzar sobre las relaciones analizadas en los problemas anteriores pero organizadas en torno a un único cálculo escrito. En el ítem a) los alumnos deberán interpretar la escritura y recurrir a los billetes será un punto de apoyo. "Ver", es decir interpretar, en dicho cálculo 2 billetes de 100, 3 de 10 y 4 de 1 será más sencillo que producir dicha escritura, aspecto solicitado en el ítem c). El ítem b) presenta tres escrituras de las cuales dos permiten representar el problema.

Problema 1

En una empresa van a implementar un nuevo sistema de pago. Un cajero automático pagará los sueldos con monedas de $ 1 y billetes de $ 10 y $ 100. Completen el siguiente cuadro para saber cuántos billetes y monedas entregará en cada caso. Tengan en cuenta que este cajero siempre entrega la menor cantidad posible de billetes; es decir si tiene que pagar $ 10, no va a entregar 10 monedas de $ 1, sino un billete de $ 10 o si tiene que pagar $ 100, no va a entregar 10 billetes de $ 10 sino uno de $ 100.

Sueldo a pagar	Billetes de $ 100	Billetes de $ 10	Monedas de $ 1
$ 398			
$ 893			
$ 938			
$ 1.038			
$ 1.803			
$ 2.002			
$ 2.020			
$ 2.220			

Problema 2

a) ¿Cómo podría pagar las siguientes cantidades el mismo cajero, usando sólo billetes de $ 100 y monedas de $ 1?

$ 3.241
$ 8.097

b) ¿Y si el cajero sólo tuviera monedas de $ 1 y billetes de $ 10?

$ 1.475
$ 2.125

Problema 3

Un empleado de un negocio escribe algunos cálculos cuando tiene que pagar, para no confundirse.

a) Si escribe 2 x 100 + 3 x 10 + 4 x 1, ¿cuántos billetes de 100 y 10, y monedas de 1 tenía que usar para pagar? ¿Cuánto dinero representa el total?

b) Si hace un pago con 4 billetes de $ 100, 5 billetes de $ 10 y 6 monedas de $ 1, ¿Cuáles de estos cálculos podría servirle para saber cuánto pagó?

- 5 x 100 + 4 x 10 + 6 x 1
- 4 x 100 + 5 x 10 + 6 x 1
- 5 x 10 + 4 x 100 + 1 x 6

c) Si hace un pago con 22 billetes de $ 100, 4 billetes de $ 10 y 5 monedas de $ 1, ¿Cómo podría anotarlo en un solo cálculo (como lo hizo en el ítem a)?

____

____

G.C.B.A.

ACTIVIDAD 3. Armar números con multiplicaciones por 10; 100 y 1.000

Los contenidos que se presentan en esta actividad son similares a los de la actividad anterior. Sin embargo, suponen un avance en el trabajo propuesto: presentan un mayor nivel de complejidad al haberse retirado el contexto del dinero. Sin embargo, es absolutamente esperable que los alumnos resuelvan los problemas imaginando billetes y monedas.

Es importante que un mismo contenido o grupo de contenidos se juegue en varias actividades, no sólo para que los alumnos tengan nuevas oportunidades de atrapar las relaciones involucradas que pudieron haber quedado pendientes, sino también porque actividades diferentes permiten mostrar nuevas aristas de un mismo concepto. Por ello se despliega una variedad de problemas que involucran el análisis del valor posicional, con diferentes conocimientos involucrados en cada uno de ellos.

El problema 1 apunta a que los alumnos puedan analizar diferentes descomposiciones para un mismo número. Seguramente muchos alumnos intentarán hacer todos los cálculos. El docente podrá intervenir para enfatizar y hacer circular estrategias ligadas al análisis del valor posicional, para las cuales no es necesario realizar, al menos, todos los cálculos. El problema 2 exige, inversamente al problema 1, componer el número a partir de la escritura del cálculo.

Los problemas 3, 4 y 5 permiten reinvertir los conocimientos desplegados en los problemas anteriores. Algunos de ellos exigen componer el número y otros realizar descomposiciones variadas usando la suma y la multiplicación por la unidad seguida de ceros.

Problema 1

Indique cuál o cuáles de las opciones permiten formar el número:

1.250:	12 x 100 + 5 x 10
	12 x 100 + 5
	125 x 10
	1 x 1.000 + 1 x 100 + 15 x 10
	12 x 100 + 50 x 10
5.348	5 x 1.000 + 4 x 10 + 3 x 100 + 8
	53 x 100 + 48
	51 x 100 + 24 x 10 + 8
	53 x 100 + 40 x 10 + 8

Entre todos analicen si hay alguna forma de resolver este problema sin hacer muchas cuentas.

Problema 2

¿Qué número se forma en cada caso?

a) 53 x 100 + 8 x 10 + 3 =
b) 4 x 1.000 + 32 x 10 + 8 =
c) 13 x 100 + 6 =
d) 8 x 100 + 12 x 10 + 5 =
e) 14 x 100 + 11 x 100 + 15 =
f) 10 x 100 + 12 x 1.000 + 14 x 10 =

Problema 3

En parejas, para cada número, propongan dos descomposiciones diferentes que contengan sumas y multiplicaciones con 10; 100 ó 1.000

a) 34.076:
b) 8.976
c) 1.867

Problema 4

a) Calcule:

9 x 1.000 + 100 =	9 x 1.000 + 500 =
9 x 1.000 + 900 =	9 x 1.000 + 1.000 =
9 x 1.000 + 10 =	9 x 1.000 + 1 =

b) ¿Cuáles de estos cálculos da 9.999?

9 x 1.000 + 9 x 100 + 9   9 x 1.000 + 900
9 x 1.000 + 999   9 x 1.000 + 9 x 100 + 99
99 x 100 + 99 x 1
9 x 1.000 + 9 x 100 + 9 x 10 + 9 x 1
9 x 1.000 + 1.000

Problema 5

a) ¿Cuáles de los siguientes cálculos dan 25.030?

- 25 x 1.000 + 300 =
- 25 x 1.000 + 30 =
- 25 x 1.000 + 3 =

El Problema 6 plantea una situación que inicialmente es exploratoria para los alumnos. Se trata de encontrar un número que, multiplicado por 10, dé el número que se ofrece en el cuadro como producto. Se espera que los alumnos tengan la posibilidad de investigar qué relaciones hay entre los números que se ofrecen y los resultados obtenidos antes de formular una regla que les permita hallar las demás soluciones. Será interesante discutir estas estrategias. Por ejemplo, si la estrategia predominante fue la de ir buscando por cuánto multiplicar, se puede plantear una discusión sobre las relaciones entre los números de la columna de la derecha con los de las otras columnas una vez que el cuadro está terminado: ¿qué relación hay entre 450, 45 y 10?, etcétera. En la clase se podrá hacer jugar la relación entre división y multiplicación, por ejemplo identificar que es posible pensar por qué número multiplicar a 45 para que dé 450 o bien pensar 450 : 10 = 45.

b) ¿Cuáles de los siguientes cálculos dan 25.030?

- 25 x 10 x 100 + 30 =
- 25 x 100 + 30 =
- 25 x 10 x 10 x 10 + 30 =
- 250 x 100 + 30 =

Problema 6

Complete los números de la primera columna:

El número ...	multiplicado por..	da...
	10	450
	10	980
	10	360
	10	750
	10	420

El número ...	multiplicado por..	da...
	100	4.500
	100	3.200
	100	1.700
	100	3.800

El número ...	multiplicado por..	da...
	1000	4.000
	1000	7.000
	1000	45.000
	1000	36.000

Es importante que –además de formular la regla de “agregar ceros” – los alumnos se vean invitados a explorar explicaciones acerca de “por qué se agregan ceros”. Se espera que puedan circular ideas como “las unidades pasan a las decenas y entonces el cero llena las unidades” o “al multiplicar por 100 todo se corre dos posiciones porque los unos valen cienes, los dieces miles, y los ceros se agregan para mostrar que no hay más unos y dieces”, entre otras posibles.

ACTIVIDAD 4. Relaciones entre sistema de numeración y división por 10; 100 y 1.000

Esta actividad tiene como finalidad introducir a los alumnos en un nuevo análisis de las relaciones entre escrituras numéricas y divisiones y multiplicaciones por 10, 100, 1.000, etc. Nuevamente se espera que los alumnos logren identificar la información que porta un número y explicitar las relaciones aritméticas que subyacen a un número. En este caso se pondrá en juego la división por la unidad seguida de ceros. Se espera promover el análisis de por qué funciona la regla de “sacar ceros”, además de que los alumnos puedan usarla.

En esta Actividad se usa la noción de cociente entero que supone la relación “dividendo = cociente x divisor + resto”. Sería conveniente que el maestro ayude a sus alumnos a recordarla a partir de algunas divisiones sencillas. Por ello se propone en el material del alumno:

Para recordar:

Dividendo	divisor
resto	cociente

El problema 1 tiene la intención de generar un conjunto de resultados que permitan a los alumnos enfrentarse a la elaboración de unas primeras conjeturas a propósito de explorar qué relaciones es posible establecer entre un número dado y el cociente que se obtiene al dividir ese número por 10.

Problema 1

Complete el cuadro. Seguramente no va a ser necesario que haga las cuentas escritas ya que los resultados obtenidos en una le serán de utilidad para la otra.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
30	10		
31	10		
32	10		
34	10		
35	10		
36	10		
37	10		
38	10		
39	10		
40	10		
41	10		
42	10		
43	10		

Analicen entre todos cómo va cambiando el cociente y el resto. ¿Cuál es el resto mayor? ¿Cada cuántos números cambia el cociente?

Seguramente, a medida que avanzan en la producción de los resultados, irán empezando a notar ciertas regularidades en "qué sucede" con el divisor, el cociente y el resto. Se espera que puedan elaborar ideas como *"a medida que aumenta el dividendo en uno el resto aumenta en uno", "cuando el resto llega a 9, ya no aumenta el resto sino que aumenta el cociente" "hay muchos números con el mismo cociente"*, etc.

El problema 2 apunta a que los alumnos, ya sin la serie presente de los números, puedan anticipar, sin hacer cálculos, el cociente. Aunque no se solicite, los alumnos se verán enfrentados a analizar el resto. Es, en el comienzo, una actividad de exploración y, por lo tanto, el docente alentará a que los alumnos utilicen cualquier procedimiento para completar los primeros resultados de cada tabla. Esta exploración puede interrumpirse en el punto en que los alumnos comienzan a descubrir cierta regularidad en los cocientes, para dar lugar a una discusión colectiva sobre las razones que permiten establecer esta regularidad. La idea es que los argumentos que se esgriman en esta discusión permitan anticipar cuáles serán los resultados de los casilleros de la tabla que aún falta completar.

Se espera que los alumnos apelen a relaciones establecidas en actividades anteriores (por ejemplo: "35 : 10 tiene cociente 3 y resto 5 porque 35 = 30 + 5 = 3 x 10 + 5"), y/o a relaciones ya conocidas ("38 : 10 tiene cociente 3 porque 3 x 10 = 30 y si hago 4 x 10 da 40 y ya me paso de 38"). También el maestro puede recurrir a relaciones que no sean utilizadas espontáneamente y proponer algunos argumentos. Por ejemplo: si 3 x 10 = 30, 30 : 10 = 3, si 2 x 100 = 200, entonces 200 : 100 = 2, etcétera.

Problema 2

a) Si cada uno de estos números se divide por 10, ¿cuál será el cociente entero?

30 35 38
40 45 48

b) Si cada uno de estos números se divide por 100, ¿cuál será el cociente entero?

100 102 120
180 190 195
200

c) Si cada uno de estos números se divide por 1.000, ¿cuál será el cociente entero?

1.000 2.000 2.100
2.350 2.930 3.000 3.500

d) Calcule:

20.000 : 10 = 20.000 : 100 =
20.000 : 1.000 = 20.000 : 10.000 =

El problema 3 tiene su punto de apoyo en los conocimientos elaborados por los alumnos en las actividades anteriores. En efecto, en la parte a), para explicar que es posible saber que el cociente de

1.234 : 10 es 123 y el resto 4, se puede apelar a 123 x 10 = 1.230 y 1.230 + 4 = 1234. Entonces, 1.234 = 123 x 10 + 4.

Otra explicación a la que se aspira es que los alumnos planteen que la división por 10 se puede pensar como "armar paquetes de a 10". De ese modo, como la posición de las unidades nunca va a tener 10, la cifra que esté en esa ubicación va a ser el resto de dividir por 10, "porque no alcanza para un paquete más". Si la división fuera por 100, este razonamiento se extendería a las dos últimas cifras, etcétera.

Problema 3

a) Complete las siguientes tablas:

Cálculo	Cociente	Resto
1.234 : 10		
1.234 : 100		
1.234 : 1.000		

Cálculo	Cociente	Resto
4.672 : 10		
4.672 : 100		
4.672 : 1.000		

Cálculo	Cociente	Resto
48.530 : 10		
48.530 : 100		
48.530 : 1.000		
48.530 : 10.000		

Es usual que los alumnos propongan y admitan estas explicaciones cuando los divisores son 10 y 100, pero se desconcierten cuando los divisores son mayores, como por ejemplo 1.000, y rechacen la posibilidad de que existan restos tales como 530 porque es un número demasiado grande comparado con los restos usuales. En esos casos, será necesario retomar las relaciones establecidas para números más pequeños y analizar que el tamaño del resto sólo está limitado por el del divisor.

En los problemas 1 y 2 de esta Actividad quedó establecida cierta regularidad al realizar algunas divisiones por 10, 100 y 1.000. Se trata ahora de encontrar no sólo el cociente, sino también el resto de una división y de explorar, a la vez, qué va ocurriendo con los cocientes cuando a un mismo número se lo divide por distintas potencias de 10. En este sentido, este problema permite pensar un mismo número como compuesto por multiplicaciones que son equivalentes. Por ejemplo: 1.234 = 1 x 1.000 + 234; 12 x 100 + 34; 123 x 10 + 4. El análisis del problema con los alumnos permitirá explicitar qué relaciones hay entre estas escrituras, tal como se hizo en varios problemas de la Actividad 3.

El problema 4 está planteado para que los alumnos puedan "pasar en limpio" el conjunto de relaciones y conocimientos que han estado movilizando. En cierta medida es una propuesta que permite "resumir" lo que se aprendió hasta el momento no sólo a través de las explicaciones que elaboren los alumnos, sino también a partir de las que el docente pueda ofrecer de alguna manera, "ordenando" las resoluciones que han circulado. Este es un aspecto muy importante ya que aún en los casos en los que los alumnos hayan podido resolver de manera correcta, no necesariamente las relaciones implícitas en sus resoluciones están estructuradas en un discurso organizado. El docente es quien remarca las propiedades que aparecieron, reorganiza las ideas que circularon para que tomen una forma coherente y sistematizada, identifica un procedimiento y analiza o explica una propiedad. Por ello se plantea:

Problema 4

Entre todos formulen una regla para dividir mentalmente un número de dos o más cifras por 10; de tres o más cifras por 100; de cuatro o más cifras por 1.000; etcétera. Intenten explicar por qué funciona esa regla.

El último problema de esta actividad apunta a que los alumnos puedan identificar que para que el número pueda dividirse por 10 y "dé justo", es decir, tenga resto 0, deberá tener al 0 como última cifra. El docente podrá generalizar esta pregunta a las características que debería tener el número para cumplir los mismos requisitos al dividir por 100, por 1.000, etc.

Problema 5

Coloque un número en la calculadora de modo que, al dividirlo por 10, dé justo (es decir que en el visor no aparezca un resultado con coma). ¿Qué característica debe tener el número que elija?

ACTIVIDAD 5. Pensar sobre los números haciendo sumas y restas en la calculadora[1]

En esta actividad se retoman aspectos ligados a la composición y descomposición de los números y a las relaciones aritméticas que subyacen a los mismos. Tanto en la actividad 5 como en la actividad 6 se presentan conjuntos de problemas que, a partir de la condición de "hacer aparecer" o "hacer desaparecer" números en la calculadora, los alumnos se vean "obligados" a tener que anticipar los cálculos por realizar. En la actividad 5 se promueve el análisis en términos de sumas y restas. Nuevamente se enfatizará en el trabajo cómo la información que brinda la escritura del número y las composiciones y descomposiciones con 1, 10, 100 y 1.000 serán muy útiles para anticipar los resultados, sin hacer "demasiadas" cuentas.

El problema 1 tiene la finalidad de que los alumnos identifiquen que pueden anticipar el número "completando" o "llenando" lugares imaginarios a partir de los números escritos. Del mismo modo podrán anticipar cómo formarlo, a partir de interpretar el valor de cada cifra, por ejemplo pensar el 327 como 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1. En el punto c) los números han sido seleccionados de tal modo de provocar el análisis de cómo varía la descomposición del número según cómo los mismos números cambian de posición (en 3.207 y 3.027 "vuelven" a estar el 3, el 2 y el 7, está vez con el 0, pero en diferente orden). Aún cuando los alumnos realicen estos problemas con éxito en la obtención de los resultados, será importante tratar los aspectos ligados al valor posicional en forma colectiva, para que sean explicitados e identificados.

Problema 1

a) Si se suma en la calculadora 1.000 + 100 + 100 + 10 + 10 + 1, ¿qué número aparecerá en el visor?
b) ¿Qué sumas haría en la calculadora para que se forme el número 327 utilizando sólo 1, 10 y 100 y el signo +?
c) ¿Cómo haría para anotar del mismo modo 3.207? ¿Y 3.027? Puede usar también el 1.000.

1 Si no todos los alumnos tuvieran calculadora, no habría problema en trabajar con una calculadora cada dos o tres alumnos. La mayor parte de los problemas puede resolverse anticipando y la calculadora se usa para verificar o controlar los resultados. Es importante recordar que también las computadoras traen calculadora. En el Windows puede usarse apretando sucesivamente Inicio, Programas, Accesorios, Calculadora. También algunos celulares y relojes tienen calculadoras, y los alumnos podrán usarlas para estos problemas.

Los problemas 2 y 3, con una complejidad interna creciente, tienen la intención de promover un trabajo anticipatorio nuevamente. Se espera que los alumnos puedan identificar qué número restar o sumar a otro para que cambie por otro número dado. El análisis colectivo deberá centrarse en el valor posicional, es decir en identificar que para que “desaparezca” el 8 de 863 se trata de sacar 800 y que esta información puede “leerse” en la posición de la cifra.

Los problemas 4 y 5 están planteados de tal manera que inicialmente los alumnos podrán desplegar una actividad exploratoria, probando con diferentes números. Se espera que a medida que avancen en el problema, empiecen a identificar que “mirando” el número puedo saber cuántas restas de 10 se podrán realizar y cuál es el resto. Por ejemplo, para 235 se podrán realizar 23 restas de 10 y sobrará 5. Este análisis involucra determinar “cuántas veces entra 10 en 235” o “cuántas decenas hay en 235” o “cuántos dieces entran en 235”. Cualquiera –o todas– estas expresiones podrán circular para promover el análisis de la información que porta el número. El problema 5 simplemente extiende el tamaño de los números y propone restas de 100. Y en el ítem b) agrega una nueva restricción: resto 0, de tal manera que los alumnos tendrán que identificar que el número tendrá que “terminar en 00”.

Problema 2

Anote los cálculos que va haciendo para “transformar” el número en el visor de la calculadora.

a) Escriba en la calculadora el 7.863. Haga luego un solo cálculo para que aparezca el 863.

b) Deje en el visor el 863. Haga una operación para que sólo se vea el 63.

c) Sin borrar el 63, trate que el visor muestre el 0.

Problema 3

Nuevamente anotarán números y harán un cálculo para que se transformen en otros números. Anoten los cálculos que van realizando en cada caso.

a) En el visor de la calculadora aparece el número 5.468. ¿Cómo lograr que aparezca, con un solo cálculo, el número 5.068 sin borrar?

b) ¿Y cómo haría para pasar del 5.068 con un solo cálculo al número 6.068?

c) Ahora, a partir de 6.068 ¿qué cálculo permite pasar a 2.028?

Problema 4

a) Escriba en la calculadora un número de tres cifras menor que 180. Réstele 10 todas las veces que pueda. Anote el número, la cantidad de restas y cuánto sobró.

	Número menor que 180	Cantidad de restas de 10	Sobra
1º número			
2º número			
3º número			

b) Busque otros números que al restarle muchas veces 10, llegue a 0.

	Número menor que 180	Cantidad de restas de 10	Sobra
1º número			
2º número			
3º número			

G.C.B.A.

Problema 5

a) Escriba en la calculadora un número de cuatro cifras menor que 2.000. Réstele 100 todas las veces que pueda. Anote el número, la cantidad de restas y cuánto le sobró.

	Número menor que 2000	Cantidad de restas de 10	Sobra
1º número			
2º número			
3º número			

b) Busque otros números que al restarle muchas veces 10, llegue a 0

	Número menor que 180	Cantidad de restas de 10	Sobra
1º número			
2º número			
3º número			

Analicen entre todos cómo saber antes de hacer los cálculos, cuántas restas se harán y cuánto va a sobrar.

ACTIVIDAD 6. Pensar sobre los números haciendo multiplicaciones y divisiones en la calculadora

Los problemas que componen estas actividades con la calculadora se vinculan con los “efectos” de multiplicar y/o dividir un número por 10; 100 o 1.000. Sin embargo, presentan algunas diferencias entre ellos. Así, el Problema 1 apela a los resultados que se van obteniendo cuando, a un mismo número, se lo multiplica o divide reiteradamente por 10.

Problema 1

a) ¿Qué números aparecerán en el visor de la calculadora si se oprimen las siguientes teclas: 14 x 10 x 10 x 10 =?
b) ¿Y si se aprieta una vez más x 10?
c) ¿Y si se aprieta dos veces más x 10?

Analicen entre todos cómo es posible saber qué número se forma sin realizar los cálculos.

El Problema 2 intenta orientar hacia los efectos de aplicar sucesivamente multiplicaciones y divisiones por 10 a un mismo número y poder discutir relaciones tales como, por ejemplo, si se multiplica a un número por 10 y luego se divide al resultado por 10, el número original no se modifica porque ambas operaciones se “compensan” entre sí. El ítem c) de este problema (54 x 10 x 10 : 100) permite extender el análisis hacia la idea de que el 100 se puede pensar como 10 x 10, entonces, si se multiplica a 54 x 10 x 10 y luego se lo divide por 10 x 10, el resultado final necesariamente será el número original porque se lo multiplicó y dividió por el mismo número.

Problema 2

Si se hicieran estas cuentas en la calculadora, ¿qué número aparecería en la pantalla?

a) 34 x 10 x 10 : 10 x 10 =
b) 120 x 10 : 10 : 10 =
c) 54 x 10 x 10 : 100 =

Pueden verificar, si precisan, con la calculadora.

El problema 3 extiende dicho trabajo a divisiones con el fin de que los alumnos identifiquen que dividir sucesivamente por 10 equivale a dividir por 100 o por 1.000.

Los problemas 4 y 5 presentan una nueva complejidad: ahora es necesario anticipar las características que debe tener un determinado número para cumplir las condiciones que plantea la situación. Por ejemplo:

Problema 3

a) ¿Qué números van apareciendo en el visor de la calculadora si se oprimen las siguientes teclas: 123.000 : 10 : 10 =?
b) ¿Y si se aprieta una vez más : 10?

Analicen entre todos cómo es posible saber qué número se forma sin realizar los cálculos.

Problema 4

En parejas:
a) Coloquen un número en la calculadora de manera tal que, al multiplicarlo por 10 x 10 x 10, se obtenga un número de 4 cifras.
b) ¿Con qué números puedo obtener otro de 4 cifras? ¿Y si quisiéramos que tuviera 5 cifras?
c) ¿Y qué números se podría colocar para obtener un número de más de 5 cifras?

Problema 5

Para hacer en parejas:

Coloquen un número en la calculadora de modo que, luego de dividirlo por 10 dos veces consecutivas (: 10 : 10), dé justo (es decir, que en el visor no aparezca un resultado con coma). ¿Qué característica debe tener el número que elijan?

G.C.B.A.

¿Qué aprendimos?

Este capítulo presenta una colección de problemas que tiene la intención de que los alumnos puedan volver a visitar diversos aspectos que han venido trabajando. Se espera que puedan ser realizados en forma más autónoma y para ello los alumnos podrán recurrir a los problemas anteriores ya resueltos, a las anotaciones que han venido realizando, a las conclusiones y propiedades reconocidas y escritas. Asimismo, el docente podrá invitar a los alumnos a que identifiquen cuáles clases de problemas les presentan mayor dificultad, y si fuera necesario, retomar la enseñanza de los conocimientos involucrados en ellos. El apartado Para finalizar intenta promover un momento de explicitación y análisis de los avances logrados en el tiempo de trabajo sobre el cálculo mental tanto como identificar dificultades.

Esta es una selección de 15 problemas parecidos a los que han venido haciendo. Para resolverlos, seguramente van a tener que volver a mirar problemas anteriores y sus anotaciones. Resolverlos les permitirá seguir trabajando todavía con aquellos temas que más dificultad les presentan y darse cuenta si tienen nuevas dudas.

Problema 1

Busque una manera de averiguar el resultado de:

66 + 11 = 664 + 101 =
763 + 101 = 6644 + 1111=

Problema 2

Para cada uno de los siguientes cálculos hay tres opciones, pero solo una de ellas es correcta. Sin hacer la cuenta, analice las opciones y marque cuál le parece que es el resultado correcto:

a) 555 + 157 = 612 312 712
b) 789 – 234 = 155 455 555

Problema 3

Complete el cuadro:

¿Cuánto hay que sumarle a	para obtener ...?	Respuesta	Anote acá los cálculos que necesite para averiguarlo
440	1.000		
200	2.000		
50	1.000		
2699	3.000		

Problema 4

Coloque Verdadero o Falso. Intente analizarlas usando las relaciones entre números sin hacer cada cuenta.

- 9 x 9 = 3 x 3 x 3 x 3 ☐
- 6 x 9 = 9 x 2 x 3 ☐
- 9 x 8 = 9 x 2 x 4 ☐
- 9 x 8 = 9 x 4 + 9 x 4 ☐
- 3 x 75 = 3 x 70 + 3 x 5 ☐
- 51 x 18 = 50 x 18 + 18 ☐
- 99 x 44 = 100 x 44 – 1 x 44 ☐

Problema 5

a) En una librería quieren ordenar las carpetas. Si tienen 998 y las ponen en paquetes de a 10, ¿cuántas cajas arman? ¿cuántas les sobran?

b) Y si tienen 998 y las ponen en paquetes de 100, ¿cuántas cajas arman? ¿cuántas les sobran?

Problema 6

Anote una única operación, a partir del número que aparece en la columna de la izquierda para que aparezca en la calculadora el resultado escrito en la columna de la derecha.

Número original	Cálculo	Número "transformado"
345		34.500
6.000		6
3		3.000

Problema 7

Calcule mentalmente estos productos usando la multiplicación por números "redondos".

a) 6 ´ 31 =
b) 7 ´ 42 =
c) 3 ´ 199 =

Problema 8

a) En 11 cajas de 700 tornillos, ¿habrá más o menos que 7.000 tornillos?
b) En 107 cajas de 100 tornillos, ¿habrá más o menos que 10.000 tornillos?

Problema 9

Indique en qué columna debería colocarse el resultado. Debe anticiparlo sin hacer la cuenta. Puede redondear para averiguarlo.

Cálculo	Entre 0 y 10	Entre 10 y 100	Entre 100 y 1.000	Entre 1.000 y 10.000
7 x 56				
444 x 11				
99 x 4				

Problema 10

a) ¿Qué número habrá que restar a 8.888 para que quede 8.808?
b) ¿Qué número habrá que restar a 8.888 para que quede 8.088?

Problema 11

En un juego de mesa, el jugador que hace de cajero paga con billetes de 1, de 10, de 100 y de 1.000 pesos. Completen el siguiente cuadro para saber cuántos billetes entregará en cada caso teniendo en cuenta que siempre entrega la menor cantidad posible de billetes.

Monto a pagar	Billetes de $ 1.000	Billetes de $ 100	Billetes de $ 10	Billetes de $ 1
$ 5.679				
$ 2.034				
$ 1.980				

Problema 12

Indique cuál o cuáles de las opciones permiten formar el número 5.653:

a) 56 x 100 + 5 x 10
b) 56 x 100 + 53
c) 565 x 10 + 3
d) 5 x 1.000 + 6 x 100 + 5 x 10 + 3 x 1
e) 56 x 10 + 53 ´ 1

Problema 13

¿Qué número se forma en cada caso?

a) 5.000 + 500 + 50 + 5 =
b) 5.000 + 500 + 5 =
c) 5.000 + 55 =
d) 44 x 100 + 5 x 10 + 5 =
e) 3 x 1.000 + 3 x 10 + 3 =
f) 333 x 100 + 6 =

Problema 14

Complete el cuadro:

Número ...	Multiplicado por	da...
	10	5.000
	100	45.000
456		45.600

Problema 15

Complete el cuadro:

Cálculo	Cociente	Resto
5.555 : 10		
6.666 : 100		
7.777 : 1.000		

Para finalizar

¿Qué problemas le resultaron ahora más sencillos que cuando los hizo por primera vez?

¿Qué estrategias de cálculo ahora tiene más disponibles y puede usar con más comodidad?

¿Usó alguna de estas maneras de hacer cálculos en situaciones de la vida cotidiana?

¿Qué problemas le siguen resultando muy complejos?

¿En qué páginas de este documento hay problemas similares a los que más le cuestan?

Anote alguna manera de resolverlos. Seguramente, los que aún le son complejos, con más ejercitación también podrán convertirse en fáciles.

Bibliografía para el docente sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números y las operaciones (en niños y en jóvenes y adultos)

- Avila, A.: "Repensando el currículo de matemáticas para la educación de los adultos", en *Conocimiento matemático en la Educación de Jóvenes y adultos*. UNESCO, Chile, 1997.
- Avila, A.: "Matemáticas y Educación de jóvenes y adultos", en Revista *Decisio. Saberes para la acción en Educación de Adultos*. Nº Primavera 2003. Disponible en: http://tariacuri.crefal.edu.mx/decisio/d4/index.php
- Avila, A.: "Cálculo escrito y pérdida de significación", en Revista *Decisio. Saberes para la acción en Educación de Adultos*. Nº Primavera 2003. Disponible en: http://tariacuri.crefal.edu.mx/decisio/d4/index.php
- Barderas, Santiago: "Análisis de cuatro algoritmos operatorios obtenidos en investigación de campo con adultos analfabetos", en Revista *Educación Matemática*. Vol 7, Nº2, Agosto 1995, México.
- Broitman, C.: *Estrategias de cálculo con números naturales. Segundo ciclo EGB*. Buenos Aires, Santillana, 2005.
- Carraher, T.; Carraher, D.; Y Schliemann, A.: *En la vida diez, en la escuela cero*. México, Siglo XXI, 1991.
- Delprato, M.F.: "Educación de Adultos: ¿Saberes matemáticos previos o saberes previos a los matemáticos?", en Revista *RELIME*, vol 8, Nº 2, julio 2005. Disponible en http://www.clame.org.mx/relime/numero2-2005.html
- Dirección General de Educación Básica, Pcia. de Buenos Aires. "Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB" Gabinete Pedagógico Curricular – Matemática, 2001. Disponible en: http://abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/default.cfm
- Dirección General de Educación Básica. Pcia. de Buenos. Aires (2001): "Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la Multiplicación en los tres ciclos de la EGB". Disponible en: http://abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/default.cfm
- Dirección General de Educación Básica. Pcia. de Buenos. Aires (2001): "Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la División en los tres ciclos de la EGB". Disponible en: http://abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/default.cfm
- Ferreiro, E.: "El cálculo escolar y el cálculo con dinero en situación inflacionaria" en: *Proceso de alfabetización. La alfabetización en proceso*. Bs. As., FALTA EDITORIAL,1986.
- Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula (1997): *Documento de actualización curricular Nº 4*. Matemática. Dirección de Currícula. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Disponible en en: http://www.buenosaires.edu.ar/areas/educacion/curricula/docum/matematica.php

- Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula (2006): *Cálculo Mental con Números Naturales. Apuntes para la enseñanza*. Plan Plurianual. Disponible en: http://www.buenosaires.edu.ar/areas/educacion/curricula/plan_pluri.php
- Knijnik, G. (2003): "Educación de personas adultas y etnomatemáticas" en Revista *Decisio. Saberes para la acción en Educación de Adultos*. Nº Primavera 2003. En: http://tariacuri.crefal.edu.mx/decisio/d4/index.php
- Lerner, D.: *La matemática en la escuela aquí y ahora*, Bs. As., Aique, 1992.
- Lerner, D.; Sadovsky, P. y Wolman, S.: "El sistema de numeración: un problema didáctico". en Parra y Saiz (comp.) *Didáctica de Matemáticas*. Bs. As., Paidós, 1994.
- Mariño, G.: "La educación matemática de jóvenes y adultos. Influencias y trayectos", en Revista *Decisio. Saberes para la acción en Educación de Adultos*. Nº Primavera 2003. En: http://tariacuri.crefal.edu.mx/decisio/d4/index.php
- Parra, C.: "Cálculo mental en la escuela primaria", en Parra y Saiz (comp): *Didáctica de Matemáticas*, Buenos Aires, Paidós, 1994.
- Sadovsky, P.: *Enseñar Matemática hoy*. Libros del Zorzal, Bs. As, 2005.
- Saiz, I.: "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir", en Parra y Saiz (comp): *Didáctica de Matemáticas*. Buenos Aires. Paidós, 1994.
- Soto Cornejo, I. y Rouche, Nicolás: "Problemas de Proporcionalidad resueltos por campesinos chilenos", en *Educación Matemática*. Vol 7, Nº1, abril 1995, México.
- Vergnaud, G. *El niño, las matemáticas y la realidad, problema de las matemáticas en la escuela*. Trillas, México, l991.